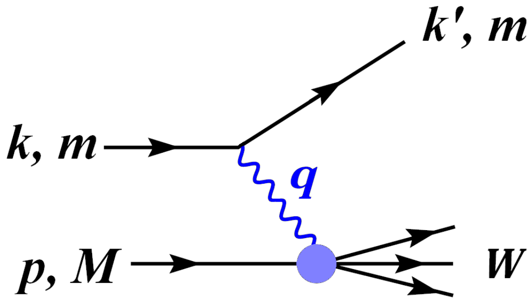
Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za fiziko

Jedra in osnovni delci

Domača naloga

Strukturne funkcije



Barbara Horvat

Oktober 2007, Ljubljana

Kazalo

1 Sipalni presek za $ep \to eX$ ter strukturne funkcije W_i

Sipalni presek pri neelastičnem sipanju leptona e na hadronu p z izmenjavo virtualnega fotona, kot je prikazano na platnici ($e+p \to e+X$), kjer obarvana pika predstavlja hadron, je sorazmeren produktu leptonskega ter hadronskega tenzorja (leptonski ter hadronski tok)

$$d\sigma \propto L^e_{\mu\nu} W^{\mu\nu}. \tag{1}$$

Leptonski tenzor za obravnavani primer smo zapisali že na predavanjih in je enak

$$L^e_{\mu\nu} = 2(k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k' \cdot k - m^2) g^{\mu\nu}). \tag{2}$$

Hadronski tenzor pa lahko v najbolj splošni obliki zapišemo kot linearno kombinacijo $g^{\mu\nu}$ ter četvercev neodvisnih gibalnih količin p ter $q = p' - p = k - k'$

$$W^{\mu\nu} = -W_1\, g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2}\, p^\mu p^\nu + \frac{W_4}{M^2}\, q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2}\, (p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu). \tag{3}$$

V enačbi (3) je bil izpuščen člen z W_3, ki je rezerviran za reakcijo, ki krši parnost (elektronski žarek je zamenjan z nevtrinskim, kjer namesto virtualnega fotona nastopa šibki bozon (Z^0 oz. $W^\pm$)). Če iz [1] upoštevamo še

$$q_\mu W^{\mu\nu} = q_\nu W^{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

ter v enačbo (4) vstavimo izraz (3)

$$\begin{aligned} 0 &= -W_1 q^\nu + \frac{W_2}{M^2}(p\cdot q)p^\nu + \frac{W_4}{M^2}q^2 q^\nu + \frac{W_5}{M^2}((p\cdot q)q^\nu + q^2 p^\nu) = \\ &= \Big(- W_1 + \frac{W_4}{M^2}q^2 + \frac{W_5}{M^2}(p\cdot q)\Big)q^\nu + \Big(\frac{W_2}{M^2}(p\cdot q) + \frac{W_5}{M^2}q^2\Big)p^\nu. \end{aligned} \tag{5}$$

Oba člena pred četvercema morata biti enaka 0. Tako iz drugega člena dobimo

$$W_5 = -\frac{p\cdot q}{q^2} W_2, \tag{6}$$

iz prvega pa (ob upoštevanju izraza (6))

$$W_4 = \frac{M^2}{q^2} W_1 + (\frac{p\cdot q}{q^2})^2 W_2. \tag{7}$$

Skratka, v $W^{\mu\nu}$ oz. v hadronskem toku imamo le dve neodvisni strukturni funkciji. Če vstavimo (6) ter (7) v izraz (3) ter dobljeno enačbo uredimo, dobimo

$$W^{\mu\nu} = W_1\Big(- g^{\mu\nu} + \frac{1}{q^2} q^\mu q^\nu\Big) + \frac{W_2}{M^2}\Big(p^\mu - \frac{p\cdot q}{q^2} q^\mu\Big)\Big(p^\nu - \frac{p\cdot q}{q^2} q^\nu\Big). \tag{8}$$

Ko združimo (2) ter (8) v izrazu (1) ter iz [1] upoštevamo

$$q^\mu L^e_{\mu\nu} = q^\nu L^e_{\mu\nu} = 0, \tag{9}$$

dobimo

$$L_e^{\mu\nu}W_{\mu\nu} = 4W_1(k\cdot k') + \frac{2W_2}{M^2}\Big(2(p\cdot k)(p\cdot k') - M^2(k\cdot k')\Big). \tag{10}$$

V laboratorijskem sistemu, kjer je $\vec{k} = \vec{p_i}$, $\vec{p} = -\vec{p_i}$, $\vec{k}' = \vec{p_f}$, $\vec{p}' = -\vec{p_f}$ in θ kot sipanja, pa je izraz (10)

$$L_e^{\mu\nu}W_{\mu\nu} = 4EE'\left(W_2\cos^2(\frac{\theta}{2}) + 2W_1\sin^2(\frac{\theta}{2})\right). \tag{11}$$

E predstavlja začetno energijo leptona, E' pa končno. Sipalni presek v celoti pa je tako (po [1])

$$\left.\frac{d\sigma}{dE'd\Omega}\right|_{lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4(\frac{\theta}{2})}\left(W_2\cos^2(\frac{\theta}{2}) + 2W_1\sin^2(\frac{\theta}{2})\right), \tag{12}$$

kjer je masa leptona (m) zanemarjena.

2 Strukturne funkcije W_i ter F_i

Ko je valovna dolžina virtualnega fotona že dovolj majhna ($-q^2$ je velik), lahko govorimo o neelastičnem sipanju na kvarkih hadrona (protona). Takrat preide izraz v oklepaju enačbe (12) v obliko za točkaste delce (sipanje na hadronu je sipanje na netočkastem delcu), ki smo jo izpeljali na predavanjih

$$\left(\cos^2(\frac{\theta}{2}) - \frac{q^2}{2M}\sin^2(\frac{\theta}{2})\right)\delta(\nu + \frac{q^2}{2M}), \tag{13}$$

kjer sta $\nu = \frac{p\cdot q}{M}$ ter q^2 neodvisni spremenljivki in spremenljivki, od katerih zavisijo W_i. Če primerjamo (12) ter (13), vidimo, da se pri sipanju na Diracovih delcih hadronske strukturne funkcije preoblikujejo v

$$2W_1 = \frac{Q^2}{2m^2}\delta(\nu - \frac{Q^2}{2m}) = \frac{Q^2}{2m^2\nu}\delta(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}) \tag{14}$$

$$W_2 = \delta(\nu - \frac{Q^2}{2m}) = \frac{1}{\nu}\delta(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}), \tag{15}$$

kjer je $Q^2 = -q^2$, m masa kvarka, na katerem se lepton siplje, pri zadnjem enačaju v zgornjih dveh izrazih pa je bilo upoštevano, da $\delta(\frac{x}{a}) = a\delta(x)$.

Kot sem že omenila, so strukturne funkcije W_i odvisne od ν ter Q^2. Če pa bolje pogledamo (14) ter (15), vidimo, da ta odvisnost ni neodvisna, temveč lahko rečemo, da so strukturne funkcije odvisne od njunega medsebojnega razmerja oz. od $\frac{Q^2}{2m\nu}$. Bolj očiten zapis zgornjega je

$$2mW_1 = \frac{Q^2}{2m\nu}\delta(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}) \tag{16}$$

$$\nu W_2 = \delta(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}). \tag{17}$$

Če sedaj pogledamo celoten hadron, na katerem se lepton siplje, moramo izraza (16) ter (17) zapisati na drugi skali, kjer namesto mase kvarka nastopi masa hadrona. Seveda pa dejstvo, da so v hadronu prisotni Diracovi delci (točkasti), katere "detektiramo" ob raziskavi hadronove strukture pri majhni valovni dolžini virtualnega fotona, upoštevamo tako, da so strukturne funkcije odvisne le od enega parametra

$$\omega = \frac{2p \cdot q}{Q^2} = \frac{2M\nu}{Q^2}. \tag{18}$$

Skratka

$$\lim_{Q^2\to\infty} \Big(MW_1(\nu, Q^2) \Big) = F_1(\omega) \tag{19}$$

$$\lim_{Q^2\to\infty} \Big(\nu W_2(\nu, Q^2) \Big) = F_2(\omega). \tag{20}$$

3 Strukturne funkcije F_i ter partoni

Hadron je sestavljen iz dveh vrst delcev tj. partonov ter gluonov. Partoni so ali valenčni kvarki ali pa kvarki/antikvarki iz morja. Morje tu predstavlja množico parov kvark-antikvark. Kvarke z obravnavano interakcijo lahko "detektiramo", gluonov, pa ne. Gluoni so namreč brez električnega naboja in ne interagirajo z virtualnim fotonom. So le nosilci barvnega naboja.

Strukturne funkcije za posamezne partone se ob upoštevanju $m = xM$, kjer je m masa partona, M celotna masa hadrona, x pa delež gibalne količine hadrona, ki ga nosi dani parton, ter enačbe (18), glasijo

$$\begin{aligned} W_1^i &= \frac{Q^2}{4m^2\nu}\delta(1-\frac{Q^2}{2m\nu}) = \frac{Q^2}{4x^2M^2\nu}\delta(1-\frac{Q^2}{2xM\nu}) = \frac{1}{2x^2M\omega}\delta(1-\frac{1}{x\omega}) = \\ &= \frac{1}{2xM\omega}\delta(x-\frac{1}{\omega}) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} W_2^i &= \frac{1}{\nu}\delta(1-\frac{Q^2}{2m\nu}) = \frac{1}{\nu}\delta(1-\frac{Q^2}{2xM\nu}) = \frac{1}{\nu}\delta(1-\frac{1}{x\omega}) = \\ &= \frac{1}{\nu}x\delta(x-\frac{1}{\omega}). \end{aligned} \tag{22}$$

Da pa dobimo prave strukturne funkcije partonov, moramo določiti njihovo pričakovano vrednost

$$< W_{1,2}^i >= \int_0^1 W_{1,2}^i dP^i. \tag{23}$$

P^i ($0 \leq P^i \leq 1$) pove, kolikšna je verjetnost, da parton i nosi del x hadronove gibalne količine ($0 \leq x \leq 1$). Porazdelitev gibalne količine partonov glede na dele gibalne količine (x) pa zapišemo na standarden način

$$f_i(x) = \frac{dP_i}{dx}. \tag{24}$$

Strukturna funkcija hadrona pa je sešteta po vseh partonih (i) ter obtežena s kvadrati njihovih električnih nabojev (po [1]) . Skratka

$$F_1 = \sum_i e_i^2 M < W_1^i > \tag{25}$$

$$F_2 = \sum_i e_i^2 \nu < W_2^i > . \tag{26}$$

Če izraza (21) ter (22) skupaj s (24) vstavimo v (23)

$$< W_1^i > = \int_0^1 \frac{1}{2M\omega x}\delta(x-\frac{1}{\omega})f_i(x)dx = \frac{1}{2M\omega}\frac{1}{x}f_i(x)\Big|_{x=\frac{1}{\omega}} = \frac{1}{2M}f_i(\frac{1}{\omega}) \tag{27}$$

$$< W_2^i > = \int_0^1 \frac{1}{\nu}x\delta(x-\frac{1}{\omega})f_i(x)dx = \frac{1}{\nu}xf_i(x)\Big|_{x=\frac{1}{\omega}} = \frac{1}{\nu\omega}f_i(\frac{1}{\omega}). \tag{28}$$

Potrebno je le še vstaviti izraza (27) ter (28) v (25) ter (26) ter upoštevati $x = \frac{1}{\omega}$ (da izrazimo rezultat v odvisnosti od spremenljivke x)

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\sum_i e_i^2 f_i(x) \tag{29}$$

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x). \tag{30}$$

Vidimo, da velja

$$F_2 = 2xF_1. \tag{31}$$

4 Hadronske strukturne funkcije

Kot omenjeno, so hadroni sestavljeni iz valenčnih kvarkov ter množice parov kvark-antikvark, ki pripadajo morju. Za vse kvarke/antikvarke preimenujemo funkcije f_i v znake, ki določajo kvarkov/antikvarkov okus (za u kvark je $f_i(x) = u(x)$, za njegov antikvark pa $f_i(x) = \bar{u}(x)$). Indeks v oz. s pri danem "okusu" pa stoji za valenčne kvarke oz. za kvarke iz morja. Tako lahko zapišemo strukturno funkcijo kot

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}F_2^{eh}(x) &= (\frac{2}{3})^2\Big(u(x)+\bar{u}(x)\Big) + (\frac{1}{3})^2\Big(d(x)+\bar{d}(x)\Big) + \\ &+(\frac{1}{3})^2\Big(s(x)+\bar{s}(x)\Big) + (\frac{2}{3})^2\Big(c(x)+\bar{c}(x)\Big) + \\ &+(\frac{1}{3})^2\Big(b(x)+\bar{b}(x)\Big) + (\frac{2}{3})^2\Big(t(x)+\bar{t}(x)\Big). \end{aligned} \tag{32}$$

Verjetnostno porazdelitev pa zapišemo v obliki

$$u = u_v + u_s. \tag{33}$$

Za vse kvarke morja pa velja še

$$u_s = \bar{u}_s = \alpha d_s = \alpha\bar{d}_s = \beta s_s = \beta\bar{s}_s = \gamma c_s = \gamma\bar{c}_s = \epsilon b_s = \epsilon\bar{b}_s = \phi t_s = \phi\bar{t}_s = S(x), \tag{34}$$

kjer so α, β, γ, ϵ ter ϕ konstante (vsaj v prvem približku so neodvisne od x). Tako enačbo (32) v primeru barionov (3 valenčni kvarki) prepišemo v

$$\frac{1}{x}F_2^{eb} = \frac{1}{9}\Bigg(4(u_v+c_v+t_v) + (d_v+s_v+b_v) + 2S\Big(4(1+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\phi}) + (\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\epsilon})\Big)\Bigg). \tag{35}$$

Zaradi krajšega zapisa uvedem

$$\mathcal{S} = \frac{2}{9} S\Big(4(1 + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\phi}) + (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\epsilon})\Big) \tag{36}$$

in ponovno zapišem izraz (32)

$$\frac{1}{x} F_2^{eb} = \frac{1}{9}\Bigg(4(u_v + c_v + t_v) + (d_v + s_v + b_v)\Bigg) + \mathcal{S}. \tag{37}$$

Pri sipanju na protonu (uud) oz. na nevtronu (udd) bi se izraz (37) poenostavil v

$$\frac{1}{x} F_2^{ep,n} = \frac{1}{9}\Bigg(4u_v^{p,n} + d_v^{p,n}\Bigg) + \mathcal{S}. \tag{38}$$

Ker v primeru protona ter nevtrona velja

$$u_v^p = d_v^n = u_v \tag{39}$$

$$d_v^p = u_v^n = d_v, \tag{40}$$

se enačba (38) spremeni v

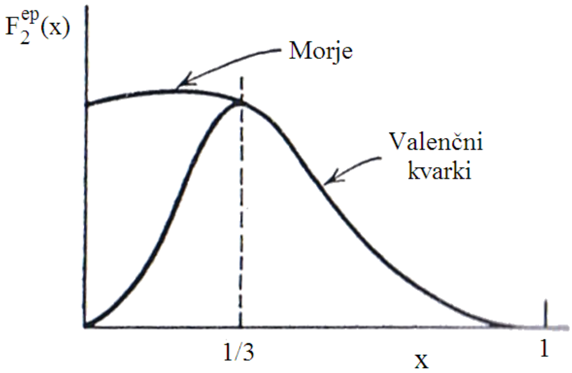
$$\frac{1}{x} F_2^{ep} = \frac{1}{9}\Bigg(4u_v + d_v\Bigg) + \mathcal{S} \tag{41}$$

$$\frac{1}{x} F_2^{en} = \frac{1}{9}\Bigg(4d_v + u_v\Bigg) + \mathcal{S}. \tag{42}$$

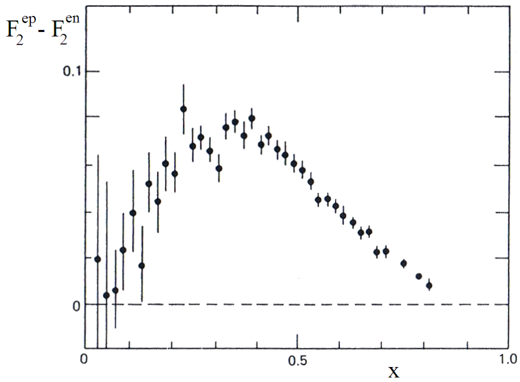
Očitno je, da je potrebno gledati razliko zgornjih dveh izrazov, če se želimo "znebiti" morja

$$\frac{1}{x}\Bigg(F_2^{ep} - F_2^{en}\Bigg) = \frac{1}{3}\Bigg(u_v - d_v\Bigg). \tag{43}$$

Meritve se dokaj dobro ujemajo z napovedjo. Funkcija F_2 je namreč na slikah (1) ter (2) zvezna zaradi interakcije z gluoni, ki omogočajo pretok gibalne količine med kvarki, in ima vrh pri $x = \frac{1}{3}$, ker imamo 3 valenčne kvarke.



Slika 1: Strukturna funkcija $F_2^{ep}(x)$ kot funkcija x. Upoštevano je, da je proton sestavljen iz treh vezanih valenčnih kvarkov ter morja parov kvark-antikvark.



Slika 2: Razlika $F_2^{ep} - F_2^{en}$ kot funkcija x izmerjena pri globokem neelastičnem sipanju. Rezultat je podoben teoretični napovedi na sliki (1), če odštejemo morje.

Literatura

[1] F. Halzen, A. D. Martin. *Quarks and Leptons, An Introductory Course in Modern Particle Physics.* John Wiley & Sons, New York, 1984.

[2] S. Eidelman et al. *Physics Letters B592.* 2004.

[3] C. Fry. *Proton Structure Functions and Parton Distribution Functions at the HERA ep Collider.* 2005.

[4] W. Melnitchouk. *Structure Functions of the Nucleon.* 2003

[5] M. Burkardt. *Imaging the Quark Structure of Nucleons.*