

*Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za matematiko in fiziko  
Oddelek za fiziko  
Smer: naravoslovna fizika*

# LASTNE FREKVENCE ZVOČNEGA RESONATORJA V OBLIKI KROGELNEGA OKTANTA

*Domača naloga pri predmetu Matematična fizika 2*

*Autor: Barbara Horvat  
Mentor: prof.dr.Alojz Kodre*

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Naloga</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Analitična rešitev</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Numerična rešitev</b>	<b>4</b>
3.1	Metoda Galerkina . . . . .	4
3.2	Metoda Galerkina za obravnavani primer resonatorja . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Slike</b>	<b>8</b>
4.1	Analitična rešitev . . . . .	9
4.1.1	. . . . .	10
4.2	Numerična rešitev . . . . .	10

# Literatura

[1] I.Kuščer - A.Kodre *Matematika v fiziki in tehniki*

# 1 Naloga

Problem lastnih frekvenc zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta je eksaktno rešljiv. S primerjavo ugotovi natančnost rešitev po Galerkinu.

## 2 Analitična rešitev

Stoječe valovanje zvoka v resonatorju opisuje valovna enačba (1), katero rešujemo z nastavkom (2):

$$\nabla^2 \delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\delta p = u(r, \theta, \phi) e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Tu predstavlja  $\delta p$  odmik tlaka od ravnovesja. Z upoštevanjem (1) ter (2) dobimo amplitudno enačbo (3):

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad (3)$$

kjer je  $k = \frac{\omega}{c}$ . Separiramo spremenljivke z upoštevanjem, da imamo sferično geometrijo (glej sliko (1) na strani 8):

$$u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi). \quad (4)$$

Splošno rešitev za sferično simetrijo poznamo oz. z drugimi besedami:

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) \propto \left\{ P_l^{(m)}(\cos \theta) \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$R_{n,l}(r) \propto \left\{ \begin{array}{l} j_l(k_{nl}r) \\ n_l(k_{nl}r) \end{array} \right\}. \quad (6)$$

Tu predstavlja  $P_l^{(m)}(\cos \theta)$  asociirane Legendrove polinome,  $j_l(k_{nl}r)$  sferne Besselove oz.  $n_l(k_{nl}r)$  sferne Neumannove funkcije.

Sedaj upoštevamo robni pogoj druge vrste, kar je naravni pogoj za zvočno valovanje v resonatorju s togimi stenami):

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{rob} = 0, \quad (7)$$

kjer  $\frac{\partial}{\partial n}$  predstavlja odvod po normalni na resonator. Hkrati pa moramo upoštevati še definicijsko območje:  $r = 0 : r_0$ ,  $\theta = 0 : \frac{\pi}{2}$  ter  $\phi = 0 : \frac{\pi}{2}$  (glej sliko (1) na strani 8). Tako ugotovimo:

- iz zahteve po nesingularnosti rešitve avtomatično odpade  $n_l(kr)$  (resonator vsebuje izhodišče)
- iz robnih pogojev dobimo, da  $m = \text{sod}$ ,  $l = \text{sod}$  (velja  $|m| \leq l$ ) ter da odpade  $\sin(m\phi)$
- za lastne frekvence pa dobimo pogoj

$$\frac{\partial j_l(kr)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (8)$$

Tako sem za odmike v izbrani geometriji, katere opišemo z enačbo (9), izračunala ničle tabelirane v tabeli (1), kjer  $l$  predstavlja red Besselove funkcije,  $n$  pa zaporedno ničlo:

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=\text{sod}} \sum_{m=\text{sod}} A_{lm} j_l(kr) P_l^m(\cos \theta) \cos(m\phi) \quad (9)$$

$l \setminus n$	0	1	2	3	4	5
0	4.49341	7.72525	10.9041	14.0662	17.2208	20.3713
2	3.34209	7.28993	10.6139	13.8461	17.0429	20.2219
4	5.6467	9.84045	13.2956	16.6093	19.8624	23.0828
6	7.85109	12.2794	15.8632	19.2627	22.5781	25.8461
8	10.0104	14.6513	18.3563	21.84	25.2187	28.5365
10	12.1432	16.9775	20.796	24.3608	27.8019	31.1698

Tabela 1: Ničle enačbe (8) oz.  $kr_0$ .

Analitična rešitev problema enotskega krogelnega oktanta pa je prikazana na slikah (2) na strani 9, kjer je na  $x$ -osi  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , na  $y$ -osi pa  $z$ -koordinata. Rešitev je predstavljena pri treh fiksnih kotih  $\phi$  ( $0$ ,  $\frac{\pi}{4}$  ter  $\frac{\pi}{2}$ ) oz. na preseku krogelnega oktanta ter ravnine  $\phi = konst.$  Na vrhu vsake slike je napisano, katere  $m$ ,  $l$  sem uporabila ter katero ničlo posameznega  $l$  sem vzela. Očitno je (že iz enačbe (9)), da se s  $\phi$ -jem spreminja le amplituda:

- $m = 0 \Rightarrow$  amplituda je enaka za  $\forall \phi$
- $m = 2 \Rightarrow$  maksimalna amplituda ( $\phi = 0$ ) gre preko ničle ( $\phi = \frac{\pi}{4}$ ) v minimalno ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ )
- $m = 4 \Rightarrow$  maksimalna amplituda ( $\phi = 0$ ) gre preko minimalne ( $\phi = \frac{\pi}{4}$ ) v maksimalno ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ )
- $m = 6 \Rightarrow$  maksimalna amplituda ( $\phi = 0$ ) gre preko ničle ( $\phi = \frac{\pi}{4}$ ) v minimalno ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ )
- $m = 8 \Rightarrow$  amplituda je enaka za  $\forall \phi$
- z naraščajočim  $m$  se vse ponovi

Kako se spreminja rešitev s spreminjanjem  $l$  (narašča po stolpcih) ter redom ničle posameznega  $l$  (narašča po vrsticah) pa se nazorno vidi npr. na sliki (2) na strani 9. Spreminjanje rešitve s spreminjanjem  $m$  pa lahko opazujemo s primerjavo omenjene slike (ne gledamo prve vrstice) ter slike (3) na strani 9.

## 3 Numerična rešitev

### 3.1 Metoda Galerkina

S pomočjo Galerkinove metode iščemo rešitve problemov oblike:

$$\hat{A}u - f = 0, \quad (10)$$

kjer predstavlja  $\hat{A}$  realen sebi adjungiran operator. Namesto neznanе rešitve  $u$  izberemo linearno kombinacijo poskusnih baznih funkcij  $\phi_j$ , ki vsaka zase zadoščajo robnim pogojem (to je edina zahteva). Vemo, da ta linearna kombinacija ne more nikoli popolnoma ustrezati pravi rešitvi, zato je

$$\hat{A}\left(\sum_j a_j \phi_j\right) - f = \epsilon, \quad (11)$$

kjer  $\epsilon$  predstavlja napako. Seveda želimo, da je le-ta čim manjša. To pa dosežemo z uporabo Galerkinovega predpisa, ki pravi, da je napaka ortogonalna na vse bazne funkcije izbrane linearne kombinacije oz.

$$\langle \epsilon | \phi_j \rangle = 0, \forall j, \quad (12)$$

kjer  $\langle | \rangle$  predstavlja skalarni produkt. Iz tega pogoja dobimo vse neznane koeficiente linearne kombinacije baznih funkcij.

### 3.2 Metoda Galerkina za obravnavani primer resonatorja

Glede na to, da morajo bazne funkcije zadoščati robnemu pogoju (7) na strani 3 v izbrani geometriji (glej sliko (1) na strani 8), sem uporabila funkcije:

$$u_1 = c + a(br_0^j - r^j)^k r^i \quad (13)$$

$$u_2 = c + a(br_0^j - r^j)^k r^i z^2 \quad (14)$$

$$u_3 = c + a(br_0^j - r^j)^k r^i x^2 y^2 \quad (15)$$

$$u_4 = c + a(br_0^j - r^j)^k r^i x^2 y^2 z^2, \quad (16)$$

kjer je  $r_0$  polmer (oktanta) sfere. Koeficient  $b$  sem določila iz robnega pogoja  $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=r_0} = 0$ , koeficient  $a$  pa iz  $\int_V u dV = 0$  (imamo zaprt sistem: energija ne odteka/priteka; iste koeficiente  $a$  sem dobila tudi z minimizacijo Rayleighovega koeficienta - glej literaturo [1]).

Najprej sem z zgornjimi poskusnimi funkcijami poiskala vse tiste, ki dajo najboljše približke k analitično izračunanim rešitvam že kar same. Nato pa sem uporabila še njihove linearne kombinacije in s tem še izboljšala približke. Iz rezultatov sem lahko sklepala, da čimbolj sta bili izbrani poskusni bazni funkciji ortogonalni (v mojem izboru popolnoma pravokotni nista niti dve; gledala sem relativno: kako ortogonalni sta npr. izbrani dve funkciji glede na par v katerem obdržimo le eno od teh dveh funkcij), tem več prispeva prva funkcija k približku za lastno vrednost za določen  $l$  oz. tem več prispeva druga funkcija k lastni vrednosti za nek drug  $l$ . Z izbiro takih lastnih funkcij sem iskala rešitve za različne  $l$  (stolpci tabele (1) na strani 4)). Če pa sem vzela linearno kombinacijo funkcij, katerih skalarni produkt po parih ni preveč odstopal, sem dobivala višje ničle za posamezen  $l$  (vrstice tabele (1) na strani 4)). Seveda pa sem oba načina tudi združila in tako dobivala rešitve za različne  $l$  in različne ničle.

Z le eno bazno funkcijo

Za  $l = 0$  sem dobila (le najboljše funkcije):

$h$	$k$	$j$	$i$	$kr_0$	rel. napaka [%]
1	2	1	2	4.49632	0.065
1	3	1	2	4.50349	0.224
1	4	2	2	4.50388	0.233
1	3	2	2	4.509	0.347
1	4	1	2	4.5124	0.423
1	4	1	3	4.51371	0.452

Tabela 2:  $h$  pomeni katero poskusno bazno funkcijo  $u_h$  gledamo,  $kr_0$  numerično rešitev, relativna napaka pa odmik numerične od analitične rešitve tabelirane v tabeli (1) na strani 4. Seveda sem gledala le prve ničle od  $l = 0$ .

Najboljše za  $l = 2$ :

$h$	$k$	$j$	$i$	$kr_0$	rel. napaka [%]
2	3	1	0	3.44086	2.955
2	2	1	0	3.44142	2.972
2	4	1	0	3.44222	2.996

Tabela 3: Relativna napaka predstavlja odmik numerične od analitične rešitve tabelirane v tabele (1) na strani 4. Gledala sem le prve ničle od  $l = 2$ .

Najboljše za  $l = 4$ :

$h$	$k$	$j$	$i$	$kr_0$	rel. napaka [%]
4	4	1	0	6.46283	14.453
4	4	2	-1	6.46533	14.497
4	3	1	0	6.46685	14.524
4	3	2	-1	6.46871	14.557
4	2	2	-1	6.46957	14.573

Tabela 4: Relativna napaka predstavlja odmik numerične od analitične rešitve tabelirane v tabele (1) na strani 4. Gledala sem le prve ničle od  $l = 4$ .

Iz tabel (2), (3) ter (4) je očitno, da relativna napaka narašča z  $l$ .

Z več baznimi funkcijami

Postavila sem:  $c = 1$ ,  $r_0 = 1$ . Prav tako pa sem v linearni kombinaciji postavila koeficient pred prvo (najboljšo) funkcijo na 1 (ker imamo drugače eno neznanko v sistemu enačb, ki jih dobimo, preveč).

Za  $l = 0$ :

$N$	$h$	$k$	$j$	$i$
1	1	2	1	2
2	1	3	1	2
3	1	4	2	2
4	1	3	2	2
5	1	4	1	2
6	1	4	1	3

Tabela 5:  $N$  je oznaka za posamezne funkcije, katere sem uporabila za poskusne funkcije v tabeli spodaj.

$N$	1. ničla	2. ničla	3. ničla	4. ničla	5. ničla	6. ničla
1, 2	4.49595	7.76507				
1, 2, 3	4.49344	7.76098	11.2199			
1, 2, 3, 4	4.49341	7.7265	11.0151	14.8526		
1, 2, 3, 4, 5	4.49341	7.7254	10.9113	14.4709	18.6098	
1, 2, 3, 4, 5, 6	4.49341	7.7254	10.9099	14.4236	17.7398	26.2381

Tabela 6: Pod  $N$  je zapisano, katere funkcije sem uporabila (glej tabelo (5)) v linearni kombinaciji poskusne funkcije. Vse ničle pripadajo analitični rešitvi za  $l = 0$  iz tabele (1) na strani 4. Z dodajanjem funkcij dodajamo v nabor rešitev vedno višjo ničlo, nižjim pa zmanjšamo napako.

$N$	$[\%]_1$	$[\%]_2$	$[\%]_3$	$[\%]_4$	$[\%]_5$	$[\%]_6$
1, 2	0.0566152	0.515426				
1, 2, 3	0.000750638	0.462516	2.89578			
1, 2, 3, 4	$1.371075 * 10^{-6}$	0.0161751	1.01819	5.59097		
1, 2, 3, 4, 5	$3.4867146 * 10^{-7}$	0.00195145	0.065992	2.87698	8.06605	
1, 2, 3, 4, 5, 6	$3.4867146 * 10^{-7}$	0.00188533	0.0531479	2.54074	3.01413	28.7993

Tabela 7: Pod  $N$  je zapisano, katere funkcije sem uporabila (glej tabelo (5)) v linearni kombinaciji poskusne funkcije.  $[\%]_p$  pa označuje relativno napako numerične lastne vrednosti glede na analitično za  $l = 0$  za prvo do šesto ničlo - glej tabelo (1) na strani 4 in jo primerjaj s tabelo (6).

Za  $l = 0$  in  $l = 2$ :

$N$	$h$	$k$	$j$	$i$
1	2	3	1	0
2	2	2	1	0
3	2	4	1	0
4	1	3	1	1
5	1	2	1	1
6	1	4	1	1
7	1	2	1	2

Tabela 8:  $N$  je oznaka za posamezne funkcije, katere sem uporabila za poskusne funkcije v tabeli spodaj.

$N$	1. ničla	2. ničla	3. ničla	4. ničla	5. ničla	6. ničla	7. ničla
1, 2	3.44061	6.44279					
1, 2, 3	3.44026	6.37278	9.73948				
1, 2, 3, 4	3.37121	4.68207	7.50767	10.4313			
1, 2, 3, 4, 5	3.34219	4.4958	7.37795	8.30431	11.0032		
1, 2, 3, 4, 5, 6	3.34212	4.49448	7.31285	7.77667	10.8184	12.7592	
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	3.3421	4.49343	7.31279	7.73717	10.7604	11.2734	16.4294

Tabela 9: Pod  $N$  je zapisano, katere funkcije sem uporabila (glej tabelo (8)) v linearni kombinaciji poskusne funkcije. Lihe ničle pripadajo lastnim vrednostim za  $l = 2$ , sode pa lastnim vrednostim za  $l = 0$ . Tudi tu vska naslednja pri  $l = 2$  oz.  $l = 0$  pripada višji ničli (glej tabelo (1) na strani 4)

$N$	$[\%]_1$	$[\%]_2$	$[\%]_3$	$[\%]_4$	$[\%]_5$	$[\%]_6$	$[\%]_7$
1, 2	2.94788	43.383					
1, 2, 3	2.93714	41.825	33.6018				
1, 2, 3, 4	0.871239	4.19861	2.98682	35.0289			
1, 2, 3, 4, 5	0.00277444	0.0530912	1.20735	7.49572	3.6682		
1, 2, 3, 4, 5, 6	0.000932312	0.0237892	0.314366	0.665571	1.92672	17.0127	
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0.0000548693	0.000496625	0.313574	0.154266	1.38058	3.38672	18.6574

Tabela 10: Pod  $N$  je zapisano, katere funkcije sem uporabila (glej tabelo (8)) v linearni kombinaciji poskusne funkcije.  $[\%]_p$  pa označuje relativno napako numerične lastne vrednosti glede na analitično za  $l = 2$  oz.  $l = 0$  (izmenjaje) - glej tabelo (1) na strani 4 in jo primerjaj s tabelo (9).

A

Za  $l = 0$ ,  $l = 2$  ter  $l = 4$ :

$N$	$h$	$k$	$j$	$i$
1	1	2	1	2
2	2	3	1	0
3	4	4	1	0
4	4	4	2	-1

Tabela 11:  $N$  je oznaka za posamezne funkcije, katere sem uporabila za poskusne funkcije v tabeli spodaj.

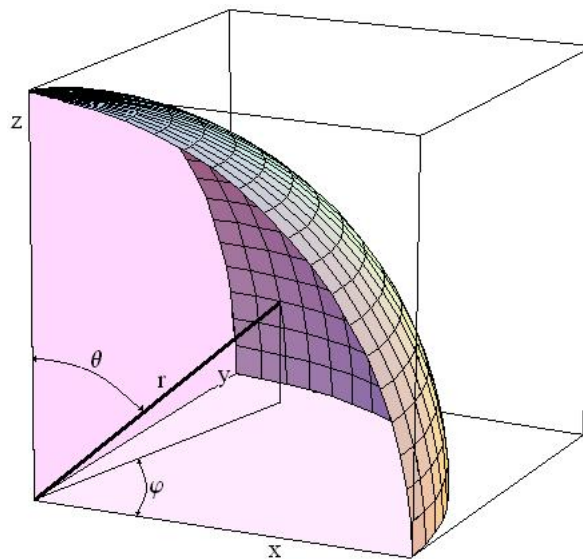
$N$	1. ničla	2. ničla	3. ničla	4. ničla
1, 2	3.35843	4.49632		
1, 2, 3	3.35842	4.49632	6.71034	
1, 2, 3, 4	3.35837	4.496	6.7074	11.5086

Tabela 12: Pod  $N$  je zapisano, katere funkcije sem uporabila (glej tabelo (11)) v linearni kombinaciji poskusne funkcije. Ničle pripadajo prvim ničlam (glej tabelo (1) na strani 4) po vrsti  $l = 2$ ,  $l = 0$ ,  $l = 4$  ter še eni za katero ni moč reči katera je, saj bi morala dodati še kakšno bazno funkcijo, da bi videla h kateri rešitvi konvergira. Vendar zaradi časovne zahtevnosti tega nisem naredila (problem predstavljata družini funkcij  $u_3$  ter  $u_4$ ).

$N$	$[\%]_1$	$[\%]_2$	$[\%]_3$	$[\%]_4$
1, 2	0.488861	0.0647797		
1, 2, 3	0.488452	0.0647323	18.8364	
1, 2, 3, 4	0.487141	0.0576306	18.7842	?

Tabela 13: Pod  $N$  je zapisano, katere funkcije sem uporabila (glej tabelo (11)) v linearni kombinaciji poskusne funkcije.  $[\%]_p$  pa označuje relativno napako numerične lastne vrednosti glede na analitično za  $l = 2$  oz.  $l = 0$  (izmenjaje) - glej tabelo (1) na strani 4 in jo primerjaj s tabelo (12).

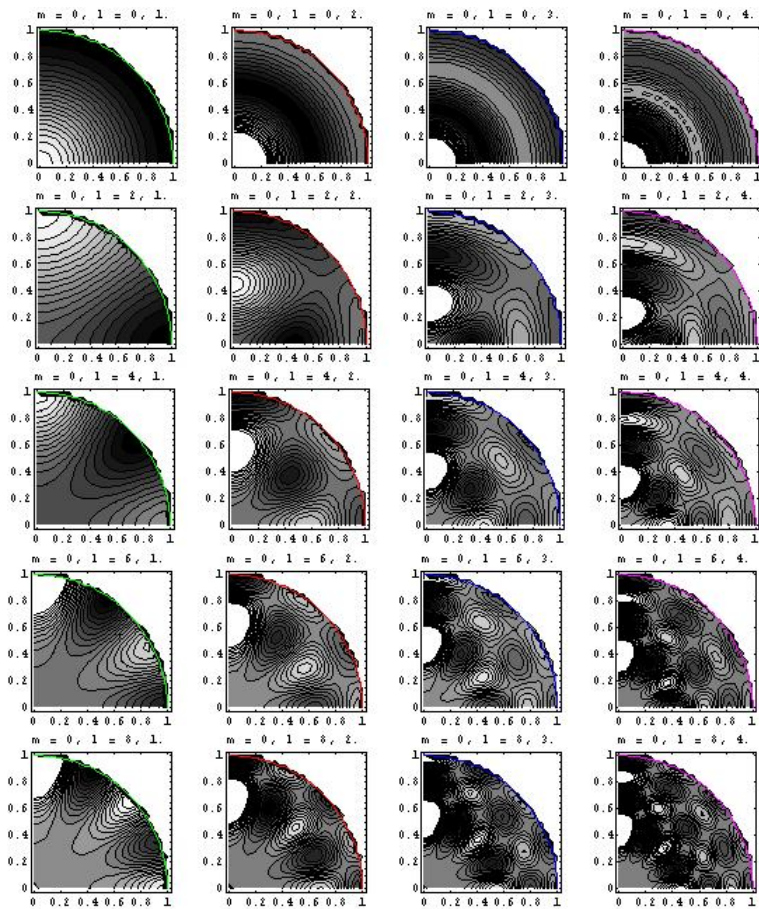
## 4 Slike



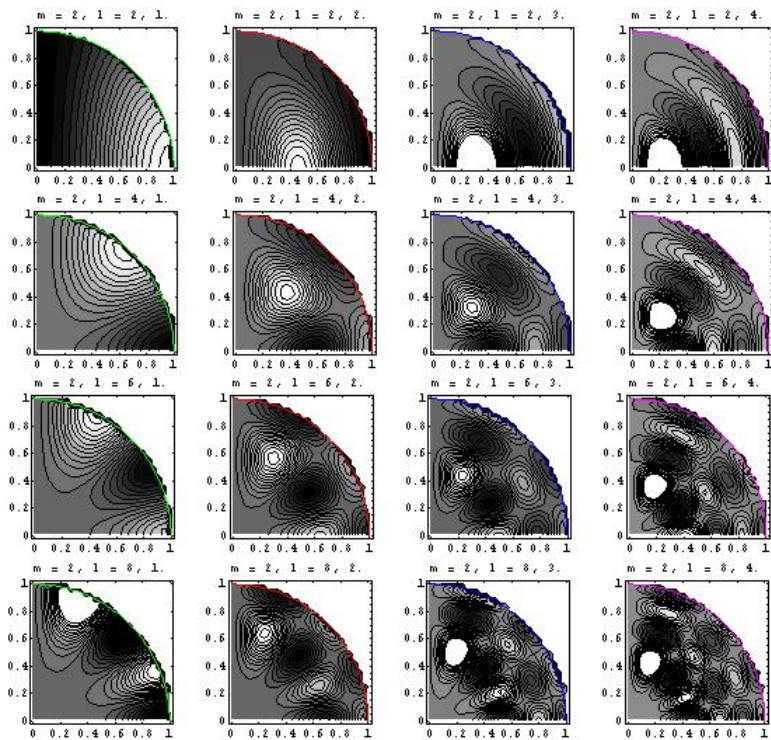
Slika 1: Obravnavani resonator je oblike krogelnega oktanta.



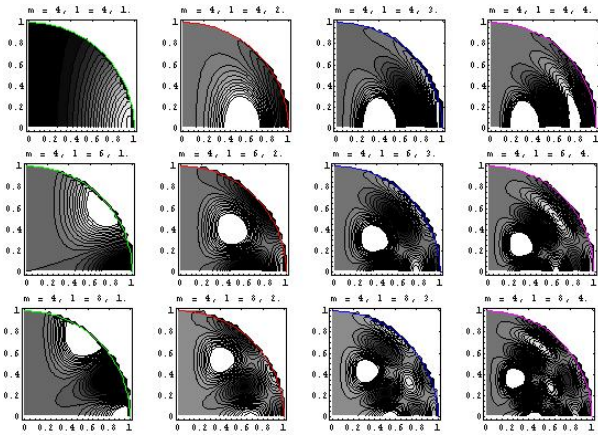
## 4.1 Analitična rešitev



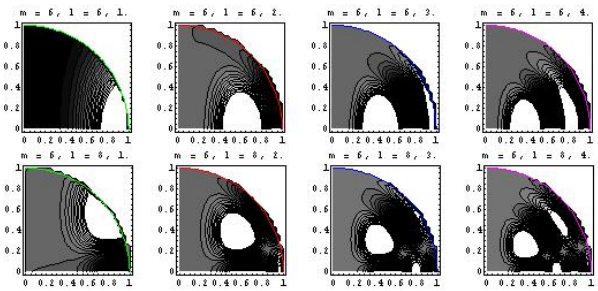
Slika 2: Analitična rešitev problema zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta pri  $\phi = 0$  za  $m = 0$ . V stolpcih je  $l = 0, 2, 4, 6, 8$ , v vrstici pa se viša red ničle posameznega  $l$ .



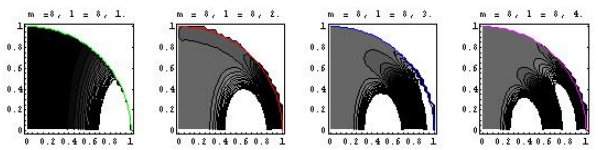
Slika 3: Analitična rešitev problema zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta pri  $\phi = 0$  za  $m = 2$ . V stolpcih je  $l = 2, 4, 6, 8$ , v vrstici pa se viša red ničle posameznega  $l$ .



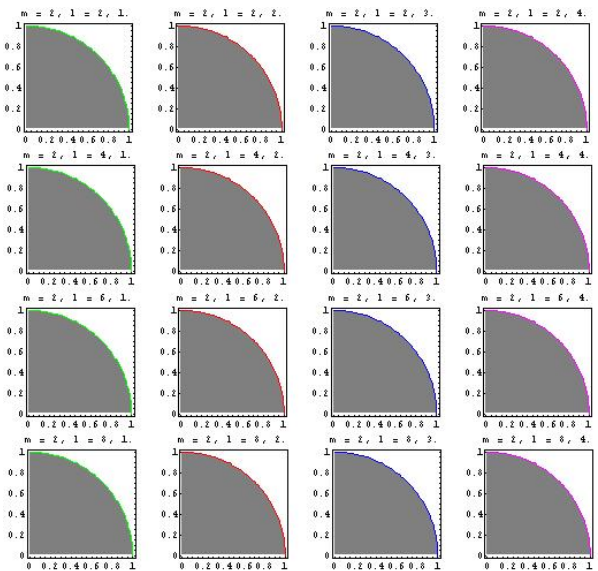
Slika 4: Analitična rešitev problema zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta pri  $\phi = 0$  za  $m = 4$ . V stolpcih je  $l = 4, 6, 8$ , v vrstici pa se viša red ničle posameznega  $l$ .



Slika 5: Analitična rešitev problema zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta pri  $\phi = 0$  za  $m = 6$ . V stolpcih je  $l = 6, 8$ , v vrstici pa se viša red ničle posameznega  $l$ .



Slika 6: Analitična rešitev problema zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta pri  $\phi = 0$  za  $m = 8$ . V stolpcih je  $l = 8$ , v vrstici pa se viša red ničle posameznega  $l$ .

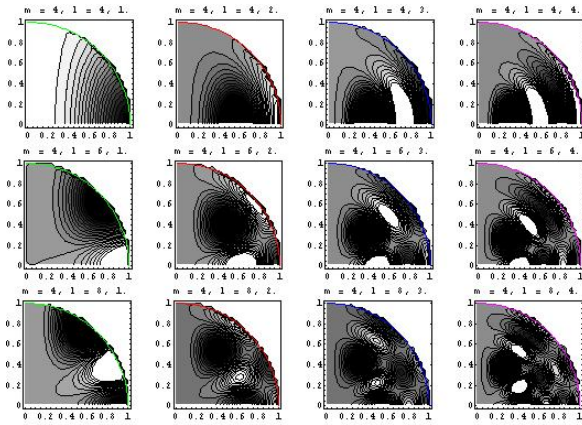


Slika 7: Analitična rešitev problema zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta pri  $\phi = \frac{\pi}{4}$  za  $m = 2$ . V stolpcih je  $l = 2, 4, 6, 8$ , v vrstici pa se viša red ničle posameznega  $l$ .

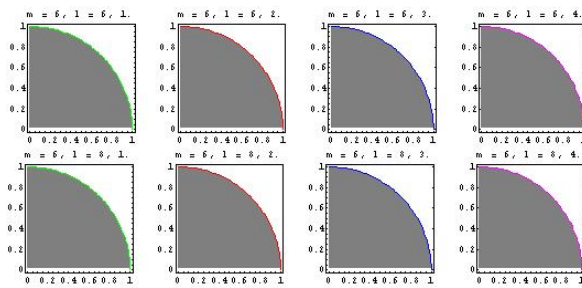
#### 4.1.1

### 4.2 Numerična rešitev

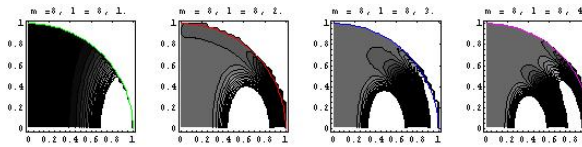




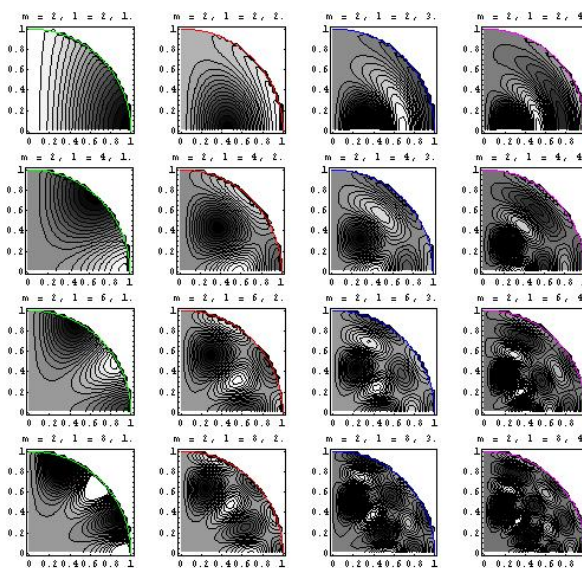
Slika 8: Analitična rešitev problema zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta pri  $\phi = \frac{\pi}{4}$  za  $m = 4$ . V stolpcih je  $l = 4, 6, 8$ , v vrstici pa se viša red ničle posameznega  $l$ .



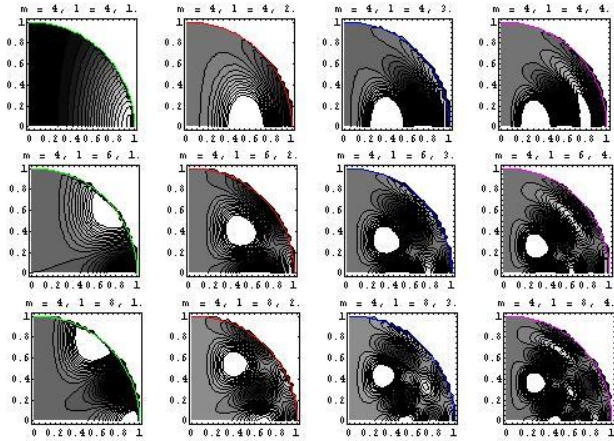
Slika 9: Analitična rešitev problema zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta pri  $\phi = \frac{\pi}{4}$  za  $m = 6$ . V stolpcih je  $l = 6, 8$ , v vrstici pa se viša red ničle posameznega  $l$ .



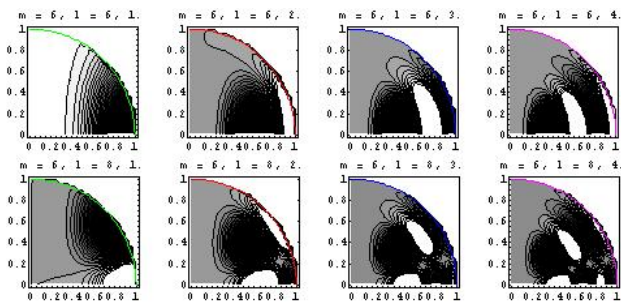
Slika 10: Analitična rešitev problema zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta pri  $\phi = \frac{\pi}{4}$  za  $m = 8$ . V stolpcih je  $l = 8$ , v vrstici pa se viša red ničle posameznega  $l$ .



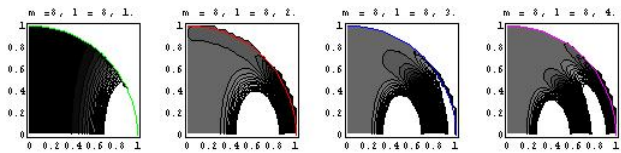
Slika 11: Analitična rešitev problema zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta pri  $\phi = \frac{\pi}{2}$  za  $m = 2$ . V stolpcih je  $l = 2, 4, 6, 8$ , v vrstici pa se viša red ničle posameznega  $l$ .



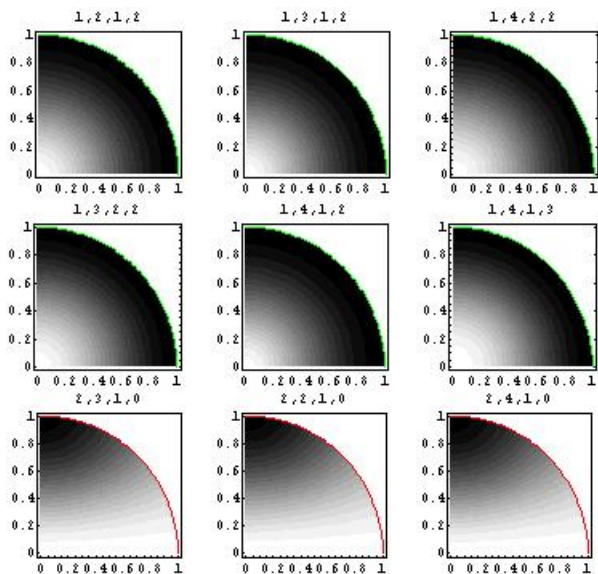
Slika 12: Analitična rešitev problema zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta pri  $\phi = \frac{\pi}{2}$  za  $m = 4$ . V stolpcih je  $l = 4, 6, 8$ , v vrstici pa se viša red ničle posameznega  $l$ .



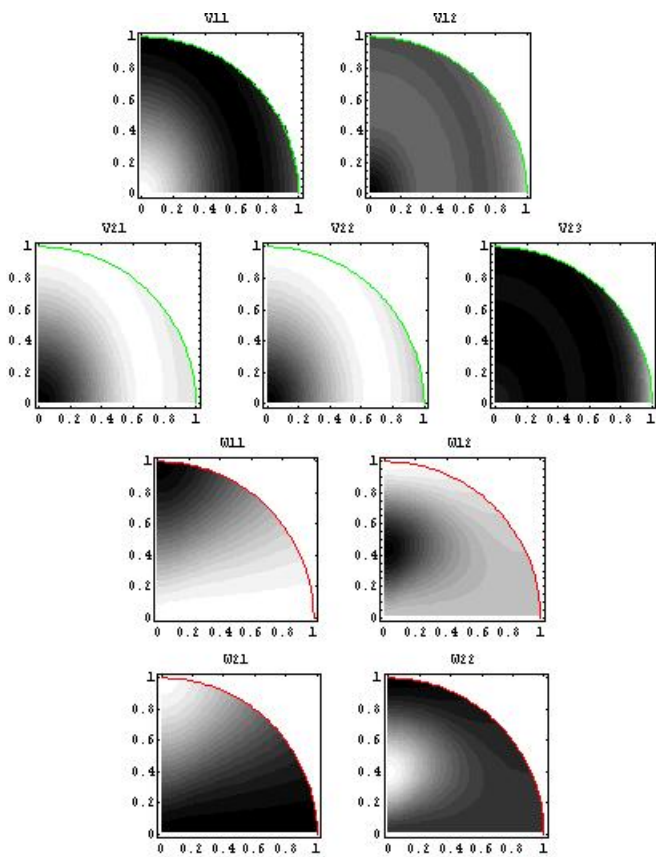
Slika 13: Analitična rešitev problema zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta pri  $\phi = \frac{\pi}{2}$  za  $m = 6$ . V stolpcih je  $l = 6, 8$ , v vrstici pa se viša red ničle posameznega  $l$ .



Slika 14: Analitična rešitev problema zvočnega resonatorja v obliki krogelnega oktanta pri  $\phi = \frac{\pi}{2}$  za  $m = 8$ . V stolpcih je  $l = 8$ , v vrstici pa se viša red ničle posameznega  $l$ .



Slika 15: Nekateri poskusne funkcije za  $l = 0$  (prva ter druga vrstica) oz.  $l = 2$  (tretja vrstica). Nad vsako sliko so štiri številke, prva določa funkcijo  $u_h$ , druge tri pa so  $k, j, i$ . Na sliki (??) na strani ?? najdemo podobnost s prvo sliko (levo zgoraj) za numerične funkcije za  $l = 0$ , takoj naslednja (v vrstici) pa je podobna funkcijam za  $l = 2$ .



Slika 16: Linearne kombinacije poskusnih funkcij za  $l = 0$  (prva ter druga vrstica; v prvi sem uporabila funkciji 1, 2, 1, 2 ter 1, 3, 1, 2 ( $h, k, j, i$ ), v drugi pa poleg teh dveh še 1, 4, 2, 2) oz.  $l = 2$  (tretja ter četrta vrstica; v tretji sem uporabila funkciji 2, 3, 1, 0 ter 2, 2, 1, 0, v četrti pa poleg teh dveh še 2, 4, 1, 0).