Kvantna mehanika2

Barbara Horvat

23.11.2004

Nerazcepen tenzorski operator, Wigner-Eckartov teorem in Landejev faktor

NAVODILO

Definiraj nerazcepen tenzorski operator, dokaži Wigner-Eckartov teorem ter izračunaj Landejev faktor.

NERAZCEPEN TENZORSKI OPERATOR

Def. $2k+1$ operatorjev $\hat{T}_q^{(k)}$; q=-k,-k+1,...,k; predstavlja komponente nerazcepnega tenzorskega operatorja ranga k, če zadoščajo sledečim komutatorskim relacijam:

$$[\hat{J}_\pm, \hat{T}_q^{(k)}] = \sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)}\hat{T}_{q\pm 1}^{(k)}$$

$$[\hat{J}_z, \hat{T}_q^{(k)}] = q\hat{T}_g^{(k)}$$

Nerazcepen pomeni, da operatorji $\hat{T}_q^{(k)}$ kombinirajo le operatorje istega ranga.

WIGNER-ECKARTOV TEOREM

Def. V reprezentaciji glede na operatorja $\hat{J}^2$, $\hat{J}_z$, kjer so bazični vektorji $|\tau jm\rangle$, je matrični element $\langle \tau' j' m'|\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle$ nerazcepnega tenzorskega operatorja dan kot produkt razcepnega/reduciranega matričnega elementa $\langle \tau' j' m'\|\hat{T}_q^{(k)}\|\tau jm\rangle$, ki ni odvisen od m, m' in q, ter Clebsch-Gordanovega koeficienta:

$$\langle \tau' j' m'|\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle = (jkj'|mqm')\langle \tau' j' m'\|\hat{T}_q^{(k)}\|\tau jm\rangle$$

τ je kvantno število, ki pripada operatorjem, ki ne komutiraji z vsemi $\hat{J}_q$.

Za dokaz WE teorema si poglejmo še:

- $(2k+1)\times(2j+1)$ vektorjev $\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle$ in
- njihovih linearnih kombinacij $|\tau JM\rangle = \sum_{m,q}(jkJ|mqM)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle$

Z $\hat{J}_\pm$ delujemo na $\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle$ ter uporabimo komutatorske relacije, ki definirajo $\hat{T}_q^{(k)}$:

$$\hat{J}_\pm\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle = [\hat{J}_\pm, \hat{T}_q^{(k)}]|\tau jm\rangle + \hat{T}_q^{(k)}\hat{J}_\pm|\tau jm\rangle$$

Sedaj delujemo z $\hat{J}_\pm$ na stanje $|\tau JM\rangle$ in upoštevamo zgornje:

$$\begin{aligned}
\hat{J}_\pm|\tau JM\rangle &= \sum_{m,q} \hat{J}_\pm (jkJ|mqM)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle = \\
&= \sum_{m,q} \sqrt{k(k+1)-q(q\pm 1)}(jkJ|mqM)\hat{T}_{q\pm 1}^{(k)}|\tau jm\rangle + \\
&+ \sum_{m,q} \sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}(jkJ|mqM)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\pm 1\rangle
\end{aligned}$$

Tu zamenjamo q s $q\mp 1$ ter m z $m\mp 1$ ter dobimo:

$$\begin{aligned}
\hat{J}_\pm|\tau JM\rangle &= \sum_{m,q} \hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle(\sqrt{k(k+1)-q(q\mp 1)}(jkJ|mq\mp 1M) + \\
&+ \sqrt{j(j+1)-m(m\mp 1)}(jkJ|m\mp 1qM))
\end{aligned}$$

Upoštevamo še rekurzijsko formulo Clebsch-Gordanovih koeficientov

$$\sqrt{k(k+1)-q(q\mp 1)}(jkJ|mq{\mp}1M)+\sqrt{j(j+1)-m(m\mp 1)}(jkJ|m{\mp}1qM) =$$

$$= \sqrt{J(J+1)-M(M\pm 1)}(jkJ|mqM\pm 1)$$

Tako pa lahko zapišemo:

$$\begin{aligned}
\hat{J}_\pm|\tau JM\rangle &= \sqrt{J(J+1)-M(M\pm 1)}\sum_{m,q}(jkJ|mqM\pm 1)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle = \\
&= \sqrt{J(J+1)-M(M\pm 1)}|\tau jm\rangle
\end{aligned}$$

Enako naredimo z opertatorjem $\hat{J}_z$.

Najprej delujmo na $\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{J}_z\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle &= [\hat{J}_z,\hat{T}_q^{(k)}]|\tau jm\rangle + \hat{T}_q^{(k)}\hat{J}_z|\tau jm\rangle = q\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle + m\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle = \\
&= (q+m)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle
\end{aligned}$$

Sedaj pa še na stanje $|\tau JM\rangle$:

$$\hat{J}_z|\tau JM\rangle = \sum_{m,q}\hat{J}_z(jkJ|mqM)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle = \sum_{m,q}(q+m)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle(jkJ|mqM)$$

Upoštevajmo, da so Clebsch-Gordanovi koeficienti $(jkJ|mqM)$ različni od 0 le v primeru, ko $q+m=M$.Torej:

$$\hat{J}_z|\tau JM\rangle = \sum_{m,q} M(jkJ|mqM)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle = M|\tau JM\rangle$$

Iz izrazov za $\hat{J}_\pm|\tau JM\rangle$ ter $\hat{J}_z|\tau JM\rangle$, da stanja $|\tau JM\rangle$ zadostijo algebri vrtilne količine. Ta stanja so pa tudi nenormalizirane lastne funkcije operatorjev $\hat{J}^2$ in $\hat{J}_z$. To pomeni, da skalarni produkt $l\tau\text{'}J\text{'}M\text{'}|\tau JM\rangle$ uboga ortogonalnost:

$$\langle\tau\text{'}J\text{'}M\text{'}|\tau JM\rangle = \delta_{JJ\text{'}}\delta_{MM\text{'}}\langle\tau\text{'}JM|\tau JM\rangle$$

<u>Trditev</u>. Reduciran matrični $\langle\tau\text{'}JM|\tau JM\rangle$ element ni odvisen od M. <u>Dokaz</u>. V razcepen matrični element vstavimo operator $\hat{J}_\pm$.

$$\begin{aligned}
\langle\tau\text{'}JM|\tau JM\rangle &= (J(J+1)-M(M\mp 1))^{-\frac{1}{2}}\langle\tau\text{'}JM|\hat{J}_\pm|\tau JM\mp 1\rangle = \\
&= (J(J+1)-M(M\mp 1))^{-\frac{1}{2}}\langle\hat{J}_\pm^\dagger\tau\text{'}JM|\tau JM\mp 1\rangle = \\
&= (J(J+1)-M(M\mp 1))^{-\frac{1}{2}}\langle\hat{J}_\mp\tau\text{'}JM|\tau JM\mp 1\rangle = \\
&= (J(J+1)-M(M\mp 1))^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\langle\tau\text{'}JM\mp 1|\tau JM\mp 1\rangle = \\
&= \langle\tau\text{'}JM\mp 1|\tau JM\mp 1\rangle
\end{aligned}$$

Tako lahko zapišemo:

$$\langle\tau\text{'}J\text{'}M\text{'}|\tau JM\rangle = \delta_{JJ\text{'}}\delta_{MM\text{'}}\langle\tau\text{'}J|\tau J\rangle$$

Sedaj pa lahko na enostaven način <u>dokažemo WE teorem</u>.

Izraz $|\tau JM\rangle = \sum_{m,q}(jkJ|mqM)\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle$ preoblikujemo s pomočjo ortogonalnosti Clebsch-Gordanovih koeficientov v:

$$\hat{T}_q^{(k)}|\tau jm\rangle = \sum_{J,M}(jkJ|mqM)|\tau JM\rangle$$

. To pa sedaj skalarno pomnožimo z leve z $\langle\tau\text{'}j\text{'}m\text{'}|$ in dobimo:

$$\langle\tau\text{'}j\text{'}m\text{'}|\hat{T}_q^{(k)}vert\tau jm\rangle = \sum_{J,M}(jkJ|mqM)\langle\tau\text{'}j\text{'}m\text{'}|\tau JM\rangle = (jkj\text{'}|mqm\text{'})\langle\tau\text{'}j\text{'}|\tau j\rangle =$$

$$= (jkj\text{'}|mqm\text{'})\langle\tau\text{'}j\text{'}||\hat{T}^k||\tau j\rangle$$

LANDEJEV FAKTOR

Kot zgled algebre za vrtilno količinno si poglejmo anomalni Zeemanov pojav (razcep na nivoje v atomu s kar nekaj elektroni v šibkem homogenem magnetnem polju).

Interakcijo med elektroni in zunanjim magnetnim poljem $\vec{B}$ zapišemo kot

$$W = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}.$$

Tu predstavlja

$$\hat{\mu} = \frac{e}{2m_e c}(\hat{l} + 2\hat{s})$$

magnetni moment elektrona (2 (pred $\hat{s}$) je zaradi spina: $g = 2$, m_e je masa elektrona, l in s pa označujeta celotno tirno vrtilnokoličino in celoten spin).

Koordinatni sistem je izbran tako, da sta magnetno polje $\vec{B}$ in os z vzporedna.

Operator magnetnega momenta lahko izrazimo s celotno vrtilno količino $(\hat{j} = \hat{l} + \hat{s})$:

$$\hat{\mu} = \hat{G}\hat{j} = \frac{e}{2m_e c}(\hat{l} + 2\hat{s}) = \frac{e}{2m_e c}(\hat{j} + \hat{s})$$

Privzamemo, da v stanjih $|jm\rangle$ prispeva le $[\frac{\hat{s}\cdot\hat{j}}{j(j+1)}]\hat{j}$ spin vektorja $\hat{s}$ oz. komponenta $\hat{s}$-a, ki je vzporedna vektorju celotne vrtilne količine $\hat{j}$. Pravokotna komponenta je v povprečju 0. (To drži za vektorske operatorje: projekcijski teorem.)Torej lahko zapišemo:

$$\hat{G} = \frac{e}{2m_e c}(1 + \frac{\hat{j} \cdot \hat{s}}{j(j+1)})$$

V zgornje vstavimo še $\hat{l}^2 = \hat{j}^2 + \hat{s}^2 - 2\hat{s} \cdot \hat{j}$:

$$\hat{G} = \frac{e}{2m_e c}[1 + \frac{\hat{j}^2 - \hat{l}^2 + \hat{s}^2}{2j(j+1)}]$$

Zaradi orientacije magnetnega polja $\vec{B} = (0, 0, B)$ potrebujemo le $\hat{\mu}_z = \hat{G}\hat{j}_z$. Privzamemo, da je magnetno polje $\vec{B}$ dovolj šibko, da zadostuje že prvi red perturbacijske teorije za izračun matričnega elementa interakcije v bazi lastnih funkcij $|jm\rangle$, v kateri sta operatorja $\hat{G}$ in $\hat{j}_z$ diagonalna.

$$lN'j'l'm'|\hat{\mu}_z B|Njlm\rangle = lN'j'l'm'|\hat{G}\hat{j}_z B|Njlm\rangle = \frac{e}{2m_e c} Bm\hbar g \delta_{mm'}\delta_{ll'}\delta_{jj'}$$

Tu je $g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$ Landejev faktor.