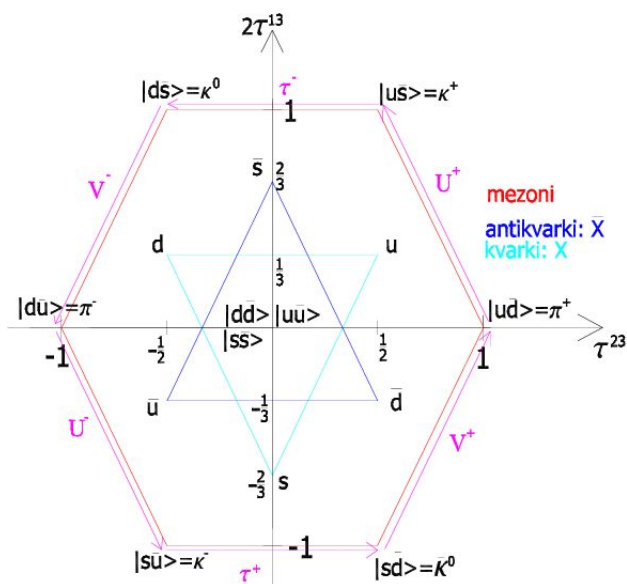


HADRONSKI MULTIPLETI

Seminar2



Povzetek

Predstavljena je gradnja hadronskih multipletov s pomočjo teorije grup ter hadronske masne formule kot posledica kršitve simetrije v enotah $\hbar = c = 1$.

1 UVOD

Simetrije in njihove posledice so pomembne v fiziki: posledica simetrije na translacijo je ohranitev gibalne količine, simetrije na obrat v času ohranitev energije, simetrije na rotacijo ohranitev vrtilne količine. . . V teoriji delcev in jedrski fiziki pa igra pomembno vlogo izospinska simetrija aproksimirana z SU(2) simetrijo, ki identificira proton ter nevtron kot dve različni stanji istega delca. Seveda je kvarkovski model zasnovan na popolnoma enakem ozadju (u ter d kvark imata podobni masi) in ga uporabljamo kot naravno ogrodje za predstavitev opaženih simetrij.

Izospinsko simetrijo lahko razpnemo v tako imenovan "Eightfold Way" oz. ob obravnavi treh kvarkov (u, d, s) govorimo o SU(3) simetriji, ki pa sem jo razpela še za eno dimenzijo navzgor (u, d, s, c; SU(4)).

Torej se kot prikladen matematični model za opis simetrij uporabi kar teorija grup.

2 IZOSPIN in SU(2) OKUSNA SIMETRIJA

Koncept izospina gre nazaj vse do Heisenberga, ki je, po odkritju nevtrona l. 1932, predlagal, da se nevtron in proton lahko tretirata kot dve stanji istega delca. Ideja za to je prišla z opazovanjem njunih mas, ki sta približno enaki ($m_p = 938.28 MeV$, $m_n = 939.57 MeV$). Na to masno razliko lahko gledamo kot na degeneracijo energije zaradi interakcij v hadronu. Ta (približna) degeneracija je bila povod za idejo o obstoju (približne) simetrije, ki se pokorava jedrskim interakcijam v hadronu oz. da se proton in nevtron obnašata identično pod ti. močno interakcijo in da pride do razlike med njima le v "paketu" naboja.

Če gledamo na proton in nevtron kot na dve linearno neodvisni stanji istega delca, ju lahko prestavimo kot dvokomponentna vektorja (analogno spin-gor ter spin-dol stanjema $spin = \frac{1}{2}$ sistema):

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Po analogiji koncepta, da se spin "pokorava" rotacijam v 3D prostoru, se izospinska simetrija prav tako pokorava grupi SU(2) rotirajočih "komponent" (p, n) preslikujoč enega v drugega v abstraktnem izospinskem prostoru. Vendar je z razliko od SU(2) spinske simetrije, SU(2) izospinska simetrija kršena. Sicer je bil izospin dolgo tretiran kot točna simetrija močne interakcije in da je simetrija kršena le zaradi elektromagnetne in šibke interakcije. Torej bi lahko masno razliko med nevtronom in protonom pripisali naboju slednjega. Vendar, če bi bila masna razlika povsem posledica elektrostatične narave, bi bil proton težji. Vemo pa, da temu ni tako (če bi bilo drugače, bi bil proton nestabilen in bi razpadel v nevtron, to pa bi predstavljalo katastrofo za stabilnost snovi). Skratka izospinska simetrija ni točna simetrija močne interakcije, vendar je kljub vsemu še vedno dobra aproksimacija.

Dobri kvantni števili sta τ^2 , ki predstavlja celoten izospin, ter τ^{23} , ki pa je tretja komponenta celotnega izospina. Tako lahko zapišemo stanje kot $|\tau^2 \tau^{23}\rangle$. Lieva algebra (set infinitezimalnih operatorjev, ki se zaprejo pod komutacijo) pa se glasi:

$$\{\tau^{2i}, \tau^{2j}\}_- = i\epsilon^{ijk} \tau^{2k} \quad (2)$$

$$\{\tau^+, \tau^-\}_- = 2\tau^{23}, \quad kjer \quad (3)$$

$\tau^\pm = \tau^{21} \pm i\tau^{22}$ sta operatorja dviga oz. spusta stanj. Primeri znanih stanj pa so:

- proton ter nevtron kot izodublet s $\tau^2 = \frac{1}{2}$: $p = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, $n = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$
- pioni kot izotriplet s $\tau^2 = 1$: $\pi^- = |1, -1\rangle$, $\pi^0 = |1, 0\rangle$, $\pi^+ = |1, 1\rangle$
(imajo tudi približno enako maso: $m_{\pi^\pm} = 139,6 MeV$, $m_{\pi^0} = 135,0 MeV$; lahko jih predstavimo tudi kot fundamentalno reprezentacijo adjungirane SU(2) grupe)
- ...

V okviru kvarkovskega modela je fundamentalna reprezentacija izospinske simetrije predstavljena z dubletom dveh okusov: up in down kvarka: $u = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, $d = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Vse ostale omenjene multiplete (n, p; π^\pm , π^0) lahko zgradimo iz up, down kvarkov oz. antikvarkov.

Vemo, da sta masi up, down kvarkov reda nekaj MeV, kar pa je bistveno manj kot pa je energijska skala močno interagirajočih hadronov, ki je reda nekaj GeV. To pa je vzrok, zakaj je izospinska simetrija dobra simetrija in da imajo stanja v izomultipletu približno enake mase.

Zgodovinsko gledano so naleteli na problem, ko so odkrili še en okus: strange (s) kvark, ki so mu po nesreči pripisali strange kvantno število -1 (S=-1). Za vse ostale okuse pa so postavili čudnost na 0. V duhu kvarkovskega modela je

očitno, da se pač doda še ena komponenta dodatnega kvarka izospinskemu vektorskemu prostoru. Tako imamo:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

V tem primeru morajo biti transformacije, ki rotirajo dane komponente kvarkov enega v drugega in ohranjajo normo, elementi SU(3) grupe. Vendar, ker nikoli niso opazili posameznih kvarkov, se je na tem mestu postavilo vprašanje: "Čemu bi naj fundamentalna reprezentacija okusne SU(3) grupe odgovarjala?"

Kakorkoli že, SU(3) simetrija se pojavi tudi v drugem in bistveno bolj fundamentalnem kontekstu v fiziki močne interakcije: kvarkom se pripiše barva (vemo, da se morajo fermioni pokoravati Paulijevemu izključitvenemu načelu; med barioni (3 kvarki) pa so odkrili Λ resonanco sestavljeno iz istih kvarkov s spinom $\frac{3}{2}$ (vsak kvark ima spin gor); torej mora obstajati še neko kvantno število, ki zadovolji Paulija; uvedla se je barva). Verjame se, da pa je ta SU(3) simetrija točna simetrija močne interakcije. Še več: moderna teorija močnih interakcij je "gauge" teorija te barvne grupe (kvantna kromodinamika).

3 GRUPA SU(3) in HADRONSKI MULTIPLETI

3.1 Algebra grupe SU(3)

Grupa SU(3) ima osem generatorjev ($n^2 - 1 = 8$, kjer $SU(n = 3)$):

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\lambda}^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vidimo, da so vse matrike $\hat{\lambda}^i$, kjer $i = 1 : 8$, brezsledne ter hermitske, da je pet realnih ter tri imaginarne, ter da sta dve diagonalni ($\hat{\lambda}^3$ in $\hat{\lambda}^8$).

Na tem mestu definiramo $\hat{\tau}^{3k} = \frac{\hat{\lambda}^k}{2}$ ter zapišemo algebro:

$$\begin{aligned} \{\hat{\lambda}^i, \hat{\lambda}^j\}_- &= 2if^{ijk}\hat{\lambda}^k & \text{oz. } \{\hat{\tau}^{3i}, \hat{\tau}^{3j}\}_- &= if^{ijk}\hat{\tau}^{3k} & , \text{ kjer } f^{ijk} &= \frac{1}{4i}Tr(\{\hat{\lambda}^i, \hat{\lambda}^j\}_-\hat{\lambda}^k) \dots \text{antisimetrični tenzor} \\ \{\hat{\lambda}^i, \hat{\lambda}^j\}_+ &= \frac{4}{3}\delta^{ij}\hat{I} + 2d^{ijk}\hat{\lambda}^k & & & , \text{ kjer } d^{ijk} &= \frac{1}{4}Tr(\{\hat{\lambda}^i, \hat{\lambda}^j\}_+\hat{\lambda}^k) \dots \text{simetrični tenzor} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\lambda}^i) &= 0 & \text{Casimirja} \\ Tr(\hat{\lambda}^i\hat{\lambda}^j) &= 2\delta^{ij} & C^1 &= \sum_i (\tau^{3i})^2 = -\frac{2}{3} \sum_i f^{ijk}\tau^{3i}\tau^{3j}\tau^{3k} \\ Tr(\{\hat{\lambda}^i, \hat{\lambda}^j\}_+) &= 4\delta^{ij} & C^2 &= \sum_i d^{ijk}\tau^{3i}\tau^{3j}\tau^{3k} = C^1(2C^1 - \frac{11}{6}I) \end{aligned}$$

Število Casimirjev grupe SU(n) je kar rang grupe SU(n), kjer je rang definiran kot $r = rang(SU(n)) = n - 1$. Število Casimirjev oz. število invariant pa predstavlja število komutirajočijh operatorjev oz. maksimalno število hkrati diagonalnih matrik $\hat{\lambda}^i$. Torej: kolikor Casimirjev, toliko "dimenzionalna" bo matrična reprezentacija. V primeru grupe SU(3) imamo dva Casimirja, torej je matrična reprezentacija 2-dimenzionalna. To pa pomeni, da lahko vsa stanja predstavimo v ravnini (glej 3.2).

3.2 ($\tau^{33}, \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38}$) ravnina ter barvna (točna) SU(3) simetrija

Hilbertov prostor nad katerimi delujejo matrike $\hat{\lambda}^k$ razpenjajo vektorji:

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

kjer R predstavlja rdečo barvo, G zeleno, B pa modro barvo. Z drugimi besedami: grupo SU(3) uporabimo za opis barvnega naboja. Sedaj pa delujemo na te bazne vektorje z diagonalnima matrikama $\hat{\tau}^{33}$ in $\hat{\tau}^{38}$ ter na absciso τ^{33} nanašamo lastne vrednosti dobljene z delovanjem matrike $\hat{\tau}^{33}$ na baznih vektorjih, na ordinato $Y = \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38}$ pa lastne vrednosti dobljene z delovanjem matrike $\frac{2}{\sqrt{3}}\hat{\tau}^{38}$ ($\frac{2}{\sqrt{3}}$ se izbere ne le zato, da dobimo lepšo reprezentacijo, ampak tudi

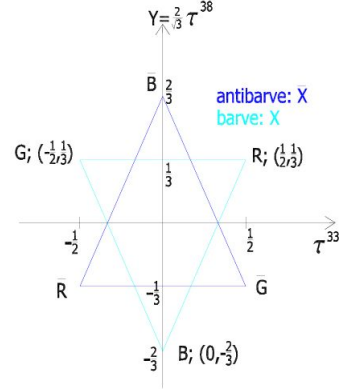
¹Glej poglavje 9.1.

zato, da se kvantna števila okusne SU(3) simetrije ujema z izbranimi kvantnimi števili oz. da dobimo pravi naboj; glej poglavje 3.4) na baznih vektorjih. Upoštevamo tudi, da za antibarve le spremenimo predznak lastnim vrednostim.

Tako lahko za barve zapišemo oz. jih predstavimo v izbrani ravnini:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^{33} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\tau}^{38} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\tau}^{33} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\tau}^{38} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\tau}^{33} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \hat{\tau}^{38} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Delovanje diagonalnih SU(3) operatorjev $\hat{\tau}^{3i}$
($i = 3, 8$) operatorjev na bazi (5).



Slika 1: Barve ter antibarve v ravnini (τ^{33}, Y) .

Seveda dobimo lastne vrednosti za antibarve z obrnjenim predznakom glede na lastne vrednosti za barve tako, da uporabimo na baznih vektorjih za antibarve (so isti kot za barve, le da razpenjajo popolnoma drug Hilbertov prostor) matrike $\hat{\lambda}$ za antibarve. Le-te pa dobimo s pomočjo operatorja konjugacije naboja: $C = i\gamma^2 K c$, kjer K naredi konjugacijo, c pa spremeni predznak. Torej:

$$\begin{pmatrix} \tau_c^{31} \\ \tau_c^{32} \\ \tau_c^{33} \\ \tau_c^{34} \\ \tau_c^{35} \\ \tau_c^{36} \\ \tau_c^{37} \\ \tau_c^{38} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tau_r^{31} \\ \tau_r^{32} \\ \tau_r^{33} \\ \tau_r^{34} \\ \tau_r^{35} \\ \tau_r^{36} \\ \tau_r^{37} \\ \tau_r^{38} \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} -\tau_r^{31} \\ \tau_r^{32} \\ -\tau_r^{33} \\ -\tau_r^{34} \\ \tau_r^{35} \\ -\tau_r^{36} \\ \tau_r^{37} \\ -\tau_r^{38} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

kjer indeks r/i označuje matriko z realnimi/imaginarnimi koeficienti, indeks c pa matriko za "antidelce". Le-te pa ponovno zadoščajo komutacijskim pravilom.

3.3 Generatorji podgrup grupe SU(3)

Vpeljemo novo bazo $|\tau^{33}Y\rangle$ za katero velja (iz $\{\hat{Y}, \hat{\tau}^{33}\}_- = 0$):

$$\hat{\tau}^{33}|\tau^{33}Y\rangle = \tau^{33}|\tau^{33}Y\rangle \quad (7)$$

$$\hat{Y}|\tau^{33}Y\rangle = Y|\tau^{33}Y\rangle \quad (8)$$

Poiskati želimo generatorje podgrup grupe SU(3) (zaprejo algebro), saj nas bo zanimalo, kako le ti delujejo na bazi $|\tau^{33}Y\rangle$, da bomo lahko zgradili multiplete.

Vemo, da za $i, j, k = 1, 2, 3$ velja $\{\tau^{3i}, \tau^{3j}\}_- = i\epsilon^{ijk}\tau^{3k}$. To je enako kot pri grupi SU(2). Tako lahko zapišemo $\hat{\tau}^\pm = \hat{\tau}^{31} \pm i\hat{\tau}^{32}$, kar je eden izmed generatorjev. Na podoben način lahko zapišemo še ostale generatorje in njihove komutatorje:

generatorji	komutatorji generatorjev	
$\hat{\tau}^\pm = \hat{\tau}^{31} \pm i\hat{\tau}^{32}$	$\{\hat{\tau}^{33}, \hat{\tau}^\pm\}_- = \pm\hat{\tau}^\pm$	$\{\hat{Y}, \hat{\tau}^\pm\}_- = 0$
$\hat{\tau}^{33}$	$\{\hat{\tau}^{33}, \hat{V}^\pm\}_- = \pm\frac{1}{2}\hat{V}^\pm$	$\{\hat{Y}, \hat{V}^\pm\}_- = \pm\hat{V}^\pm$
$\hat{V}^\pm = \hat{\tau}^{34} \pm i\hat{\tau}^{35}$	$\{\hat{\tau}^{33}, \hat{U}^\pm\}_- = \mp\frac{1}{2}\hat{U}^\pm$	$\{\hat{Y}, \hat{U}^\pm\}_- = \pm\hat{U}^\pm$
$\hat{U}^\pm = \hat{\tau}^{36} \pm i\hat{\tau}^{37}$		
$\hat{Y} = \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{\tau}^{38}$	$\{\hat{\tau}^+, \hat{\tau}^-\}_- = 2\hat{\tau}^{33}$	$\{\hat{V}^\pm, \hat{V}^{33}\}_- = \mp\hat{V}^\pm$
	$\{\hat{V}^+, \hat{V}^-\}_- = \frac{3}{2}\hat{Y} + \hat{\tau}^{33} := 2\hat{V}^{33}$	$\{\hat{U}^\pm, \hat{U}^{33}\}_- = \mp\hat{U}^\pm$
	$\{\hat{U}^+, \hat{U}^-\}_- = \frac{3}{2}\hat{Y} - \hat{\tau}^{33} := 2\hat{U}^{33}$	

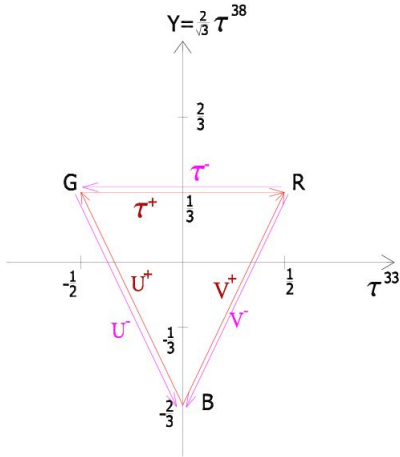
Podgrupe grupe SU(3) so grupe SU(2), ki pa v našem primeru niso invariantne. Za njih pa lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} \{\hat{\tau}^i, \hat{\tau}^j\}_- &= i\epsilon^{ijk}\hat{\tau}^k, \text{ kjer } \hat{\tau}^i = \hat{\tau}^{3i} \text{ za } i, j, k = 1, 2, 3 \\ \{\hat{V}^i, \hat{V}^j\}_- &= i\epsilon^{ijk}\hat{V}^k, \text{ kjer } \hat{V}^{i,j} = \hat{\tau}^{3i,3j} \text{ za } i, j = 4, 5 \text{ oz. } \hat{V}^k = \hat{V}^{33} \\ \{\hat{U}^i, \hat{U}^j\}_- &= i\epsilon^{ijk}\hat{U}^k, \text{ kjer } \hat{U}^{i,j} = \hat{\tau}^{3i,3j} \text{ za } i, j = 6, 7 \text{ oz. } \hat{U}^k = \hat{U}^{33}. \end{aligned}$$

Kako operatorji delujejo na bazi $|\tau^{33} Y\rangle$ (da ugotovimo, kako delujejo operatorji $\hat{\tau}^\pm, \hat{V}^\pm, \hat{U}^\pm$ na bazi, moramo na npr. $\hat{\tau}^\pm|\tau^{33} Y\rangle$ delovati enkrat z operatorjem $\hat{\tau}^{33}$ drugač pa z \hat{Y}):

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^{33}|\tau^{33} Y\rangle &= \tau^{33}|\tau^{33} Y\rangle & \hat{\tau}^{33}\hat{V}^\pm|\tau^{33} Y\rangle &= (\tau^{33} \pm \frac{1}{2})\hat{V}^\pm|\tau^{33} Y\rangle \\ \hat{Y}|\tau^{33} Y\rangle &= Y|\tau^{33} Y\rangle & \hat{Y}\hat{V}^\pm|\tau^{33} Y\rangle &= (Y \pm 1)\hat{V}^\pm|\tau^{33} Y\rangle \\ \hat{\tau}^{33}\hat{\tau}^\pm|\tau^{33} Y\rangle &= (\tau^{33} \pm 1)\hat{\tau}^\pm|\tau^{33} Y\rangle & \hat{\tau}^{33}\hat{U}^\pm|\tau^{33} Y\rangle &= (\tau^{33} \mp \frac{1}{2})\hat{U}^\pm|\tau^{33} Y\rangle \\ \hat{Y}\hat{\tau}^\pm|\tau^{33} Y\rangle &= Y\hat{\tau}^\pm|\tau^{33} Y\rangle & \hat{Y}\hat{U}^\pm|\tau^{33} Y\rangle &= (Y \pm 1)\hat{U}^\pm|\tau^{33} Y\rangle \end{aligned}$$

Kar lahko predstavimo v ravnini $Y = \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38}$:



saj:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^-(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) &= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \\ \hat{\tau}^+(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{V}^-(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) &= (0, -\frac{2}{3}) \\ \hat{V}^+(0, -\frac{2}{3}) &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

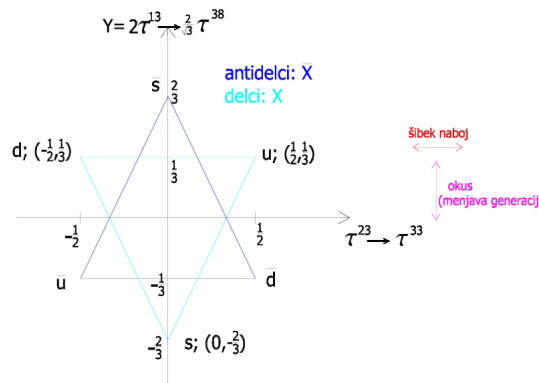
$$\begin{aligned} \hat{U}^-(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) &= (0, -\frac{2}{3}) \\ \hat{U}^+(0, -\frac{2}{3}) &= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

Za ostala stanja pa dajo ti operatorji nič.

Slika 2: Preslikave barv z operatorji τ^\pm, V^\pm, U^\pm .

3.4 Barve “zamenjamo” z delci

Za razlago delcev rečemo, da lastna vrednost operatorja $\hat{Y} = \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{\tau}^{38}$ za barve predstavlja hipernaboj ($2\hat{\tau}^{13}$) za delce, lastna vrednost operatorja $\hat{\tau}^{33}$ za barve pa tretjo komponento izospina ($\hat{\tau}^{23}$) za delce. Tako povežemo grupo $SU(3)$ z okusom ter šibkim nabojem; d u s pa sedaj predstavljajo triplet². Lepše se vidi na sliki 3:



Slika 3: Delci ter antidelci v ravnini $(\tau^{33}, Y = \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38})$.

² $SU(2)$ levoročnemu dubletu $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$ s kvantnimi števili $u_L = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3})\}$, $d_L = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{3})\}$ ter nabojema $Q_{u_L} = \frac{2}{3}$, $Q_{d_L} = -\frac{1}{3}$, kjer $\{(\tau^2, \tau^{23}), (2\tau^{13})\} = \{SU(2) \text{ izospin(šibki naboj), } U(1) \text{ hipernaboj}\}$, dodamo desnorčni singlet $(s)_R$ s kvantnimi števili $s_R = \{(0, 0), (-\frac{2}{3})\}$ ter nabojem $Q_{s_R} = -\frac{1}{3}$. Da pa se ohranijo kvantna števila vseh treh kvarkov, ko gremo iz $SU(2)$ v $SU(3)$, zamenjamo τ^{23} s τ^{33} ter $2\tau^{13}$ s $\frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38}$. Torej: $\{(\tau^2, \tau^{23}), (2\tau^{13})\}^{SU(2) \otimes U(1)} \rightarrow \{(\tau^3, \tau^{33}), (\frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38})\}^{SU(3)}$.

Seveda je potrebno na tem mestu omeniti, da SU(2) izospinska simetrija (glej poglavje 2), ki je sama po sebi že kršena, predstavlja del večje simetrije (SU(3)), ki pa je še bolj kršena. Kakorkoli že kršeno, še vedno se da z njo klasificirati opažene družine delcev in tudi masne formule (glej npr. poglavje 5.1) lepo delujejo.

3.5 Gradnja mezonov

Velja:

$$\hat{\tau} = \sum_{delci} \hat{\tau}^{delci} + \sum_{antidelci} \hat{\tau}^{antidelci}. \quad (9)$$

Torej so vsi operatorji toliko delčni, kolikor delcev imamo. V primeru mezonov so potemtakem dvodelčni. S pomočjo tega pa lahko sedaj zgradimo mezone, ki so sestavljeni iz kvarka ter antikvarka oz. delca ter antidelca.

Tako za mezone dobimo:

Spomnimo se še, kakšna sta hipernaboj ter tretja komponenta izospina za kvarke u d s:

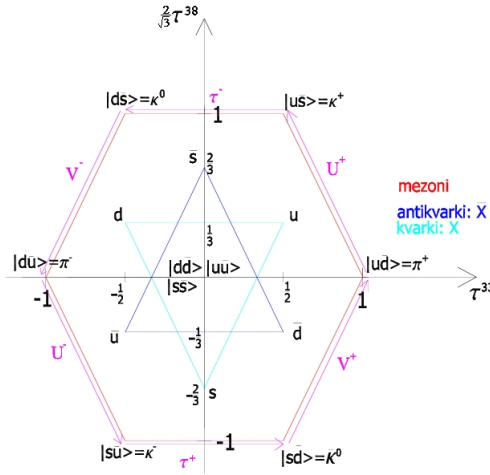
kvarki	$Y = 2\tau^{13}$	τ^{23}	Q
u	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
d	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
s	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

kjer je $Q = \tau^{13} + \tau^{23}$ v enotah osnovnega naboja.

mezoni ($\tau^{23}, 2\tau^{13}$) \rightarrow ($\tau^{33}, \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38}$)	$Y = 2\tau^{13}$	τ^{23}	Q
$\kappa^+ = u\rangle \bar{s}\rangle = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})(0, \frac{2}{3})$	1	$\frac{1}{2}$	1
$\kappa^0 = d\rangle \bar{s}\rangle = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})(0, \frac{2}{3})$	1	$-\frac{1}{2}$	0
$ s\rangle \bar{s}\rangle = (0, -\frac{2}{3})(0, \frac{2}{3})$	0	0	0
$\pi^+ = u\rangle d\rangle = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	0	1	1
$ d\rangle d\rangle = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	0	0	0
$\bar{\kappa}^0 = s\rangle d\rangle = (0, -\frac{2}{3})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	-1	$\frac{1}{2}$	0
$ u\rangle \bar{u}\rangle = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	0	0	0
$\pi^- = d\rangle \bar{u}\rangle = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	0	-1	-1
$\kappa^- = s\rangle \bar{u}\rangle = (0, -\frac{2}{3})(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	-1	$-\frac{1}{2}$	-1

Tabela 1: Kvantna števila za mezone.

kar lahko narišemo v ($\tau^{33}, \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38}$) ravnini:



Slika 4: Mezoni v ravnini ($\tau^{33}, \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38}$).

Tako za delce kot za barve velja (iz slik 2 ter 4):

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^+ |d\rangle &= |u\rangle \\ \hat{V}^+ |s\rangle &= |u\rangle \\ \hat{U}^+ |s\rangle &= |d\rangle \end{aligned}$$

Za antidelce pa velja:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^+ |\bar{u}\rangle &= -|\bar{d}\rangle \\ \hat{V}^+ |\bar{u}\rangle &= -|\bar{s}\rangle \\ \hat{U}^+ |\bar{d}\rangle &= -|\bar{s}\rangle \end{aligned}$$

Minus pri izrazih za antidelce dobimo, ker delujemo na stanja antidelcev z operatorjem za delce; operator za delce ter antidelce pa povežemo z: $\bar{\tau}_c = C\tau C^{-1}$

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_c^\pm &= C\hat{\tau}^\pm C^{-1} = C(\hat{\tau}^{31} \pm i\hat{\tau}^{32})C^{-1} = \hat{\tau}_c^{31} \pm (-i)\hat{\tau}_c^{32} = -\hat{\tau}^{31} \mp i\hat{\tau}^{32} = -\hat{\tau}^\pm \\ \hat{\tau}_c^{33} &= -\hat{\tau}^{33} \\ \hat{V}_c^\pm &= \hat{\tau}_c^{34} \mp i\hat{\tau}_c^{35} = -\hat{\tau}^{34} \mp i\hat{\tau}^{35} = -\hat{V}^\pm \end{aligned}$$

$$\hat{U}_c^\pm = \hat{\tau}_c^{36} \mp i\hat{\tau}_c^{37} = -\hat{\tau}_c^{36} \mp i\hat{\tau}_c^{37} = -\hat{U}^\pm$$

$$\hat{Y}_c = \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{\tau}_c^{38} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\hat{\tau}_c^{38} = -\hat{Y}.$$

Poiščimo še ostala stanja (imamo že šest mezonov, manjkajo pa še trije, saj kombiniramo v pare tri različne kvarke):

1. Mezon π^0 (del tripleta glede na $\hat{\tau}^\pm$; glej poglavje 3.6)

$$\hat{\tau}^+|d\bar{u}\rangle = (\hat{\tau}^+|d\rangle)|\bar{u}\rangle + |d\rangle\hat{\tau}^+|\bar{u}\rangle = |u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle \propto \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)$$

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \quad (10)$$

2. Mezon η' = $\alpha|u\bar{u}\rangle + \beta|d\bar{d}\rangle + \gamma|s\bar{s}\rangle$ (singlet):

$$\text{Upoštevajmo ortogonalnost: } \langle \pi^0 | \eta' \rangle = 0$$

$$\langle \alpha u\bar{u} + \beta d\bar{d} + \gamma s\bar{s} | \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta) = 0$$

$$\text{Torej: } \alpha = \beta.$$

$$\text{Da pa je } \eta' \text{ res singlet, pa moramo zahtevati še: } \hat{\tau}^\pm | \eta' \rangle = \hat{V}^\pm | \eta' \rangle = \hat{U}^\pm | \eta' \rangle = 0$$

$$\hat{V}^+ | \eta' \rangle = \hat{V}^+ | \alpha u\bar{u} + \alpha d\bar{d} + \gamma s\bar{s} \rangle = -\alpha | u\bar{s} \rangle + 0 + \gamma | u\bar{s} \rangle = 0$$

$$\text{Torej: } \alpha = \gamma.$$

$$\hat{\tau}^+ | \eta' \rangle = \hat{\tau}^+ | u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} \rangle = -| u\bar{d} \rangle + | u\bar{d} \rangle + 0 = 0$$

$$\hat{U}^+ | \eta' \rangle = \hat{U}^+ | u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} \rangle = 0 - | d\bar{s} \rangle + | d\bar{s} \rangle = 0$$

Seveda tudi če delujemo z operatorji $\hat{\tau}^-$, \hat{V}^- , \hat{U}^- na stanju $| \eta' \rangle$, dobimo 0.

$$\eta' = \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) \quad (11)$$

3. Mezon η^0 = $a|u\bar{u}\rangle + b|d\bar{d}\rangle + c|s\bar{s}\rangle$ (del dveh tripletov: glede na \hat{U}^\pm , \hat{V}^\pm ; glej poglavje 3.6):

$$\text{Upoštevajmo ortogonalnost: } \langle \eta^0 | \pi^0 \rangle = 0$$

$$\langle a u\bar{u} + b d\bar{d} + c s\bar{s} | \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - b) = 0$$

$$\text{Torej: } a = b.$$

$$\text{Upoštevajmo ortogonalnost: } \langle \eta^0 | \eta' \rangle = 0$$

$$\langle a u\bar{u} + a d\bar{d} + c s\bar{s} | \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a + c) = 0$$

$$\text{Torej: } c = -2a.$$

$$\eta^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle) \quad (12)$$

3.6 Razvrstitev mezonov v singlet...

Sedaj pa nas zanimajo mezonski dubleti, tripleti, oktet ter singlet, ki jih ugotavljamo s pomočjo operatorjev generatorjev podgrup grupe SU(3). Z njimi delujemo na izbrano stanje in ugotavljamo ali je za izbrani operator singlet (če iz njega ne moremo skonstruirati nobenega drugega stanja), dublet (če lahko naredimo le še eno stanje iz prvotnega)... Tako imamo glede na SU(2)⊂SU(3) operatorje:

operator	singlet	dublet	triplet
$\hat{\tau}^\pm$	η', η^0	$(\kappa^0, \kappa^+), (\kappa^-, \bar{\kappa}^0)$	(π^-, π^0, π^+)
\hat{V}^\pm	η'	$(\pi^-, \kappa^0), (\bar{\kappa}^0, \pi^+)$	$(\kappa^-, \pi^0, \kappa^+), (\kappa^-, \eta^0, \kappa^+)$
\hat{U}^\pm	η'	$(\pi^+, \kappa^+), (\kappa^-, \pi^-)$	$(\bar{\kappa}^0, \pi^0, \kappa^0), (\bar{\kappa}^0, \eta^0, \kappa^0)$

Tabela 2: SU(2) mezonski pleti.

Vse delce, ki gradijo dublete oz. triplete lahko združimo v oktet glede na operatorje $\hat{\tau}^\pm$, \hat{V}^\pm , \hat{U}^\pm (s pomočjo le teh lahko iz enega stanja iz okteta zgeneriramo še ostalih sedem). Oktet je potemtakem sestavljen iz: $\pi^-, \pi^0, \pi^+, \kappa^0, \kappa^+, \kappa^-, \bar{\kappa}^0$ ter η^0 . Z operatorji $\hat{\tau}^\pm$, \hat{V}^\pm ter \hat{U}^\pm pa ne moremo zgenerirati stanja η' iz stanj, ki so del okteta, torej predstavlja η' singlet.

Da imamo med $SU(3)$ multipleti, ki jih sestavimo iz $SU(2)$ multipletov oz. T-multipletov (so vzoredni osi τ^{33}), en singlet in en oktet vidimo tudi iz tega:

$$\begin{aligned} [13] \otimes [1\bar{3}] &= ([12]^{\frac{1}{3}} \oplus [11]^{-\frac{2}{3}}) \otimes ([12]^{-\frac{1}{3}} \oplus [11]^{\frac{2}{3}}) = ([12] \otimes [12])^0 \oplus [22]^{-1} \oplus [22]^1 \oplus [21]^0 = [23]^0 \oplus [21]^0 \oplus [22]^{-1} \oplus [22]^1 \oplus [21]^0 = \\ &= [28] \oplus [21] \end{aligned} \quad (13)$$

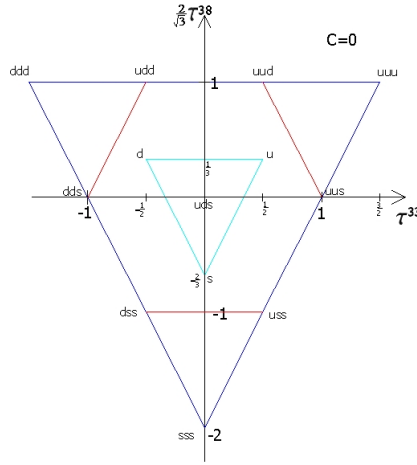
Kjer smo upoštevali, da je $[13] = [12]^{\frac{1}{3}} \oplus [11]^{-\frac{2}{3}}$, $[12] \otimes [12] = [23] \oplus [21]$ ter da indeks v eksponentu predstavlja lastno vrednost operatorja \hat{Y} , zapis pa $[\overset{\text{število delcev v stanju}}{\text{plet}}]$.

3.7 Gradnja barionov

Kot smo zapisali za mezone lahko zapišemo tudi za barione, ki so sestavljeni iz treh kvarkov, tabelo kvantnih števil in jo predstavimo v $(\tau^{33}, \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38})$ ravnini:

barioni	τ^{33}	Y	Q
uuu	$\frac{3}{2}$	1	2
uud	$\frac{1}{2}$	1	1
uus	1	0	1
udd	$-\frac{1}{2}$	1	0
uds	0	0	0
uss	$\frac{1}{2}$	-1	0
ddd	$-\frac{3}{2}$	1	-1
sss	0	-2	-1
dds	-1	0	-1
dss	$-\frac{1}{2}$	-1	-1

Tabela 3: Kvantna števila za barione.



Slika 5: Barioni v ravnini $(\tau^{33}, \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38})$.

Da ugotovimo kakšne $SU(3)$ plete, ki jih sestavimo iz $SU(2)$ multipletov, imamo, se lahko poslužimo vsem znane grafične izpeljave, katere prednost je to, da lahko takoj ugotovimo simetričnost oz. antisimetričnost pleta glede na zamenjavo delcev, ali pa kar izračunamo $[3] \otimes [3] \otimes [3]$:

$$\begin{aligned} [13] \otimes [13] &= ([12]^{\frac{1}{3}} \oplus [11]^{-\frac{2}{3}}) \otimes ([12]^{\frac{1}{3}} \oplus [11]^{-\frac{2}{3}}) = [24]^{\frac{2}{3}} \oplus [22]^{-\frac{1}{3}} \oplus [22]^{-\frac{1}{3}} \oplus [21]^{-\frac{4}{3}} = \\ &= [26] \oplus [2\bar{3}] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} ([13] \otimes [13]) \otimes [13] &= ([24]^{\frac{2}{3}} \oplus [22]^{-\frac{1}{3}} \oplus [22]^{-\frac{1}{3}} \oplus [21]^{-\frac{4}{3}}) \otimes ([12]^{\frac{1}{3}} \oplus [11]^{-\frac{2}{3}}) = \\ &= [38]^1 \oplus [34]^0 \oplus [34]^0 \oplus [32]^{-1} \oplus [34]^0 \oplus [32]^{-1} \oplus [32]^{-1} \oplus [31]^{-2} = \\ &= ([34]^1 \oplus [33]^0 \oplus [32]^{-1} \oplus [31]^{-2}) \oplus ([32]^1 \oplus [34]^0 \oplus [32]^{-1}) \oplus ([32]^1 \oplus [34]^0 \oplus [23]^{-1}) \oplus [31]^0 = \\ &= [310] \oplus [38] \oplus [38] \oplus [31] \end{aligned} \quad (15)$$

Kjer je $[38]^1 = [34]^1 \oplus [32]^1 \oplus [32]^1$, eden izmed $[34]^0 = [33]^0 \oplus [31]^0$.

Že grafično se da ugotoviti, da je deкупlet popolnoma simetričen, singlet pa popolnoma antisimetričen na zamenjavo delcev, ter da sta okteta simetrična oz. antisimetrična le na zamenjavo prvih dveh delcev ali pa to ugotovimo s konstrukcijo stanj s pomočjo operatorjev dviga/spusta ($\tau^{\pm}, V^{\pm}, U^{\pm}$) ter z ortogonalnostjo. Dobimo torej:

- poplno simetričen deкупlet

Y	τ^{23}	stanje
1	$\frac{3}{2}$	$ uuu\rangle$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uud\rangle + udu\rangle + duu\rangle)$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu\rangle + dud\rangle + udd\rangle)$
1	$-\frac{3}{2}$	$ ddd\rangle$
0	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uus\rangle + usu\rangle + suu\rangle)$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(sdu\rangle + sud\rangle + dsu\rangle + usd\rangle + dus\rangle + uds\rangle)$
0	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dds\rangle + dsd\rangle + sdd\rangle)$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ssu\rangle + sus\rangle + uss\rangle)$
-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ssd\rangle + sds\rangle + dss\rangle)$
-2	$-\frac{1}{2}$	$ sss\rangle$

- popolnoma antisimetričen singlet

Y	τ^{23}	stanje
0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds\rangle - dus\rangle + dsu\rangle - usd\rangle + sud\rangle - sdu\rangle)$

- oktet z mešano antisimetrijo

Y	τ^{23}	stanje
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(udu\rangle - duu\rangle)$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(udd\rangle - dud\rangle)$
0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(usu\rangle - suu\rangle)$
0	0	$\frac{1}{2}(usd\rangle + dsu\rangle - sud\rangle - sdu\rangle)$
0	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(dsd\rangle - sdd\rangle)$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{12}}(2 uds\rangle + usd\rangle + sdu\rangle - 2 dus\rangle - sud\rangle - sdu\rangle)$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(uss\rangle - sus\rangle)$
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(dss\rangle - sds\rangle)$

- oktet z mešano simetrijo

Y	τ^{23}	stanje
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(udu\rangle + duu\rangle - 2 uud\rangle)$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(udd\rangle + dud\rangle - 2 ddu\rangle)$
0	1	$\frac{1}{\sqrt{6}}(usu\rangle + suu\rangle - 2 uus\rangle)$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{12}}(2 uds\rangle + 2 dus\rangle - usd\rangle - dsu\rangle - sud\rangle - sdu\rangle)$
0	-1	$\frac{1}{\sqrt{6}}(dsd\rangle + sdd\rangle - 2 dds\rangle)$
0	0	$\frac{1}{2}(usd\rangle - dsu\rangle + sud\rangle - sdu\rangle)$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uss\rangle + sus\rangle - 2 ssu\rangle)$
-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(dss\rangle + sds\rangle - 2 ssd\rangle)$

4 GRUPA SU(4) in HADRONSKI MULTIPLETI

4.1 Algebra grupe SU(4)

Grupa SU(4) ima 15 generatorjev :

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{\lambda}^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\hat{\lambda}^9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\lambda}^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\lambda}^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\lambda}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\lambda}^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\lambda}^{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\lambda}^{15} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Vidimo, da so vse matrice brezsledne ter da so tri diagonalne, kar ustreza številu Casimirjevih operatorjev oz. maksimalnemu številu hkrati diagonalnih matrik $\hat{\lambda}^i$.

Velja $\hat{\tau}^{4k} = \frac{\hat{\lambda}^k}{2}$ ter:

$$\{\hat{\lambda}^i, \hat{\lambda}^j\}_- = 2if^{ijk}\hat{\lambda}^k \quad \text{oz.} \quad \{\hat{\tau}^{4i}, \hat{\tau}^{4j}\}_- = if^{ijk}\hat{\tau}^{4k} \quad , \text{ kjer } f^{ijk} = \frac{1}{4i}Tr(\{\hat{\lambda}^i, \hat{\lambda}^j\}_-\hat{\lambda}^k) \dots \text{antisimetrični tenzor}_3$$

$$\{\hat{\lambda}^i, \hat{\lambda}^j\}_+ = \delta^{ij}\hat{I} + 2d^{ijk}\hat{\lambda}^k \quad , \text{ kjer } d^{ijk} = \frac{1}{4}Tr(\{\hat{\lambda}^i, \hat{\lambda}^j\}_+\hat{\lambda}^k) \dots \text{simetrični tenzor}$$

$$Tr(\hat{\lambda}^i) = 0$$

$$Tr(\hat{\lambda}^i\hat{\lambda}^j) = 2\delta^{ij}$$

$$Tr(\{\hat{\lambda}^i, \hat{\lambda}^j\}_+) = 4\delta^{ij}$$

4.2 (τ^{43}, Y_4, C_4) prostor

Tako kot smo prešli iz SU(2) v SU(3) grupo, tako gremo iz SU(3) v SU(4) grupo: kvarkovskemu SU(3) tripletu dodamo kvark $(c)_R$ s kvantnimi števili $c_R = \{(0, 0), (\frac{1}{3})\}$ ter nabojem $Q = \frac{2}{3}$. Uvede se še eno kvantno število (zaradi enoličnosti kvarkov): šarm C_4 , ki le kvarku c priredi lastno vrednost 1, vsem ostalim pa 0. Tako lahko zapišemo $\{(\tau^3, \tau^{33}), (\frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38})\}^{SU(3)} \rightarrow \{(\tau^4, \tau^{43}), (\frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{48} + \frac{1}{12}(\hat{I} - 2\sqrt{6}\hat{\tau}^{415}))\}, \{2(\hat{\tau}^{43})^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\tau}^{48} - \sqrt{\frac{8}{3}}\hat{\tau}^{415}\}^{SU(4)}$, kjer zadnji člen predstavlja lastne vrednosti šarma. Skratka: $c_R = \{(0, 0), (\frac{1}{3}), \{1\}\}$.

Torej Hilbertov prostor nad katerimi delujejo matrice $\hat{\lambda}^k$ razpenjajo vektorji:

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |c\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Po analogiji prvega dela seminarja (grupa SU(3)) kar rečemo, da $|u\rangle$ predstavlja stanje kvarka u , $|d\rangle$ predstavlja stanje kvarka d . . . Na te bazne vektorje pa delujemo z operatorji $\hat{\tau}^{43}$, \hat{Y}_4 in \hat{C}_4 , kjer sta:

$$\hat{Y}_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{\tau}^{48} + \frac{1}{12}(\hat{I} - 2\sqrt{6}\hat{\tau}^{415}) \quad (17)$$

$$\hat{C}_4 = 2(\hat{\tau}^{43})^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\tau}^{48} - \sqrt{\frac{8}{3}}\hat{\tau}^{415}. \quad (18)$$

Tako lahko zapišemo:

kvarki	τ^{43}	Y_4	C_4	Q_4	S_4	B
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
d	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
s	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$
c	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

kjer je τ^{43} izospin oz. šibki naboj, $Y_4 (= B + S_4)$ hipernaboj, C_4 čudnost, Q_4 naboj, S_4 šarm, B pa barionsko število oz.:

$$\hat{Q}_4 = \hat{\tau}^{43} + \frac{\hat{Y}_4}{2} + \frac{\hat{C}_4}{2}$$

$$\hat{S}_4 = -2(\hat{\tau}^{43})^2 + \sqrt{3}\hat{\tau}^{48}.$$

Lastne vrednosti za antidelce imajo obrnjen predznak glede na lastne vrednosti za delce. Matrice τ_c^{4i} pa ponovno dobimo s pomočjo operatorja konjugacije naboja: $\mathcal{C} = i\gamma^2 Kc$, kjer K naredi konjugacijo, c pa spremeni predznak.

³Glej poglavje 9.2.

Torej:

$$\begin{pmatrix} \tau_c^{41} \\ \tau_c^{42} \\ \tau_c^{43} \\ \tau_c^{44} \\ \tau_c^{45} \\ \tau_c^{46} \\ \tau_c^{47} \\ \tau_c^{48} \\ \tau_c^{49} \\ \tau_c^{410} \\ \tau_c^{411} \\ \tau_c^{412} \\ \tau_c^{413} \\ \tau_c^{414} \\ \tau_c^{415} \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \tau_r^{41} \\ \tau_i^{42} \\ \tau_r^{43} \\ \tau_r^{44} \\ \tau_i^{45} \\ \tau_r^{46} \\ \tau_i^{47} \\ \tau_r^{48} \\ \tau_r^{49} \\ \tau_i^{410} \\ \tau_r^{411} \\ \tau_i^{412} \\ \tau_r^{413} \\ \tau_i^{414} \\ \tau_r^{415} \end{pmatrix} \mathcal{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -\tau_r^{41} \\ \tau_i^{42} \\ -\tau_r^{43} \\ -\tau_r^{44} \\ \tau_i^{45} \\ -\tau_r^{46} \\ \tau_i^{47} \\ -\tau_r^{48} \\ -\tau_r^{49} \\ \tau_i^{410} \\ -\tau_r^{411} \\ \tau_i^{412} \\ -\tau_r^{413} \\ \tau_i^{414} \\ -\tau_r^{415} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

kjer indeks r/i označuje matriko z realnimi/imaginarnimi koeficienti, indeks c pa matriko za antidelce.

4.3 Generatorji podgrup grupe SU(4)

Generatorji podgrup grupe SU(4), ki zaprejo algebro, so:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_4^\pm &= \hat{\tau}^{41} \pm i\hat{\tau}^{42} \\ \hat{\tau}^{43} \\ \hat{V}_4^\pm &= \hat{\tau}^{44} \pm i\hat{\tau}^{45} \\ \hat{U}_4^\pm &= \hat{\tau}^{46} \pm i\hat{\tau}^{47} \\ \hat{Y}_4 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{\tau}^{48} + \frac{1}{12}(I - 2\sqrt{6}\hat{\tau}^{415}) \\ \hat{W}_4^\pm &= \hat{\tau}^{49} \pm i\hat{\tau}^{410} \\ \hat{Z}_4^\pm &= \hat{\tau}^{411} \pm i\hat{\tau}^{412} \\ \hat{z}_4^\pm &= \hat{\tau}^{413} \pm i\hat{\tau}^{414} \\ \hat{C}_4 &= 2(\hat{\tau}^{43})^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\tau}^{48} - \sqrt{\frac{8}{3}}\hat{\tau}^{415}. \end{aligned}$$

Njihovi komutatorji pa:

$$\begin{aligned} \{\hat{\tau}^{43}, \hat{\tau}_4^\pm\}_- &= \pm\hat{\tau}_4^\pm & \{\hat{\tau}_4^+, \hat{\tau}_4^-\}_- &= 2\hat{\tau}^{43} \\ \{\hat{V}^{43}, \hat{V}_4^\pm\}_- &= \pm\hat{V}_4^\pm & \{\hat{V}_4^+, \hat{V}_4^-\}_- &= \hat{\tau}^{43} + \sqrt{3}\hat{\tau}^{48} := 2\hat{V}^{43} \\ \{\hat{U}^{43}, \hat{U}_4^\pm\}_- &= \pm\hat{U}_4^\pm & \{\hat{U}_4^+, \hat{U}_4^-\}_- &= -\hat{\tau}^{43} + \sqrt{3}\hat{\tau}^{48} := 2\hat{U}^{43} \\ \{\hat{W}^{43}, \hat{W}_4^\pm\}_- &= \pm\hat{W}_4^\pm & \{\hat{W}_4^+, \hat{W}_4^-\}_- &= \hat{\tau}^{43} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\tau}^{48} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\tau}^{415} := 2\hat{W}^{43} \\ \{\hat{Z}^{43}, \hat{Z}_4^\pm\}_- &= \pm\hat{Z}_4^\pm & \{\hat{Z}_4^+, \hat{Z}_4^-\}_- &= -\hat{\tau}^{43} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\tau}^{48} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\tau}^{415} := 2\hat{Z}^{43} \\ \{\hat{z}^{43}, \hat{z}_4^\pm\}_- &= \pm\hat{z}_4^\pm & \{\hat{z}_4^+, \hat{z}_4^-\}_- &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\hat{\tau}^{48} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\hat{\tau}^{415} := 2\hat{z}^{43} := 2\hat{z}^{43} \\ \\ \{\hat{\tau}^{43}, \hat{\tau}_4^\pm\}_- &= \pm\hat{\tau}_4^\pm & \{\hat{Y}_4, \hat{\tau}_4^\pm\}_- &= 0 & \{\hat{C}_4, \hat{\tau}_4^\pm\}_- &= 0 \\ \{\hat{\tau}^{43}, \hat{V}_4^\pm\}_- &= \pm\frac{1}{2}\hat{V}_4^\pm & \{\hat{Y}_4, \hat{V}_4^\pm\}_- &= \pm\hat{V}_4^\pm & \{\hat{C}_4, \hat{V}_4^\pm\}_- &= 0 \\ \{\hat{\tau}^{43}, \hat{U}_4^\pm\}_- &= \mp\frac{1}{2}\hat{U}_4^\pm & \{\hat{Y}_4, \hat{U}_4^\pm\}_- &= \pm\hat{U}_4^\pm & \{\hat{C}_4, \hat{U}_4^\pm\}_- &= 0 \\ \{\hat{\tau}^{43}, \hat{W}_4^\pm\}_- &= \pm\frac{1}{2}\hat{W}_4^\pm & \{\hat{Y}_4, \hat{W}_4^\pm\}_- &= 0 & \{\hat{C}_4, \hat{W}_4^\pm\}_- &= \mp\hat{W}_4^\pm \\ \{\hat{\tau}^{43}, \hat{Z}_4^\pm\}_- &= \mp\frac{1}{2}\hat{Z}_4^\pm & \{\hat{Y}_4, \hat{Z}_4^\pm\}_- &= 0 & \{\hat{C}_4, \hat{Z}_4^\pm\}_- &= \mp\hat{Z}_4^\pm \\ \{\hat{\tau}^{43}, \hat{z}_4^\pm\}_- &= 0 & \{\hat{Y}_4, \hat{z}_4^\pm\}_- &= \mp\hat{z}_4^\pm & \{\hat{C}_4, \hat{z}_4^\pm\}_- &= \mp\hat{z}_4^\pm \end{aligned}$$

Podgrupe grupe SU(4) so grupe SU(2), ki pa v našem primeru ponovno niso invariantne. Za njih pa lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} \{\hat{\tau}^i, \hat{\tau}^j\}_- &= i\epsilon^{ijk}\hat{\tau}^k, & \text{kjer } \hat{\tau}^i &= \hat{\tau}^{4i} & \text{za } i, j, k &= 1, 2, 3 \\ \{\hat{V}^i, \hat{V}^j\}_- &= i\epsilon^{ijk}\hat{V}^k, & \text{kjer } \hat{V}^{i,j} &= \hat{\tau}^{4i,4j} & \text{za } i, j &= 4, 5 \text{ oz. } \hat{V}^k = \hat{V}^{43} \\ \{\hat{U}^i, \hat{U}^j\}_- &= i\epsilon^{ijk}\hat{U}^k, & \text{kjer } \hat{U}^{i,j} &= \hat{\tau}^{4i,4j} & \text{za } i, j &= 6, 7 \text{ oz. } \hat{U}^k = \hat{U}^{43} \\ \{\hat{W}^i, \hat{W}^j\}_- &= i\epsilon^{ijk}\hat{\tau}^k, & \text{kjer } \hat{W}^i &= \hat{\tau}^{4i} & \text{za } i, j &= 9, 10 \text{ oz. } \hat{W}^k = \hat{W}^{43} \\ \{\hat{Z}^i, \hat{Z}^j\}_- &= i\epsilon^{ijk}\hat{Z}^k, & \text{kjer } \hat{Z}^{i,j} &= \hat{\tau}^{4i,4j} & \text{za } i, j &= 11, 12 \text{ oz. } \hat{Z}^k = \hat{Z}^{43} \\ \{\hat{z}^i, \hat{z}^j\}_- &= i\epsilon^{ijk}\hat{z}^k, & \text{kjer } \hat{z}^{i,j} &= \hat{\tau}^{4i,4j} & \text{za } i, j &= 13, 14 \text{ oz. } \hat{z}^k = \hat{z}^{43} \end{aligned}$$

Na tem mestu pa vpeljemo novo bazo $|\tau^{43}Y_4C_4\rangle$ za katero velja:

$$\hat{\tau}^{43}|\tau^{43}Y_4C_4\rangle = \tau^{43}|\tau^{43}Y_4C_4\rangle \quad (20)$$

$$\hat{Y}_4 |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = Y_4 |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle \quad (21)$$

$$\hat{C}_4 |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = C_4 |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle \quad (22)$$

Ponovno nas zanima delovanje ostalih operatorjev, vendar na bazi $|\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle$:

$$\hat{\tau}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = (\tau^{43} \pm 1) \hat{\tau}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle \quad \hat{\tau}_4^{\pm} \hat{W}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = (\tau^{43} \pm \frac{1}{2}) \hat{W}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle$$

$$\hat{Y}_4 \hat{\tau}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = Y_4 \hat{\tau}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle \quad \hat{Y}_4 \hat{W}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = Y_4 \hat{W}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle$$

$$\hat{C}_4 \hat{\tau}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = C_4 \hat{\tau}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle \quad \hat{C}_4 \hat{W}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = (C_4 \mp 1) \hat{W}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle$$

$$\hat{\tau}_4^{\pm} \hat{V}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = (\tau^{43} \pm \frac{1}{2}) \hat{V}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle \quad \hat{\tau}_4^{\pm} \hat{Z}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = (\tau^{43} \mp \frac{1}{2}) \hat{Z}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle$$

$$\hat{Y}_4 \hat{V}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = (Y_4 \pm 1) \hat{V}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle \quad \hat{Y}_4 \hat{Z}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = Y_4 \hat{Z}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle$$

$$\hat{C}_4 \hat{V}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = C_4 \hat{V}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle \quad \hat{C}_4 \hat{Z}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = (C_4 \mp 1) \hat{Z}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle$$

$$\hat{\tau}_4^{\pm} \hat{U}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = (\tau^{43} \mp \frac{1}{2}) \hat{U}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle \quad \hat{\tau}_4^{\pm} \hat{z}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = \tau^{43} \hat{z}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle$$

$$\hat{Y}_4 \hat{U}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = (Y_4 \pm 1) \hat{U}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle \quad \hat{Y}_4 \hat{z}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = (Y_4 \mp 1) \hat{z}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle$$

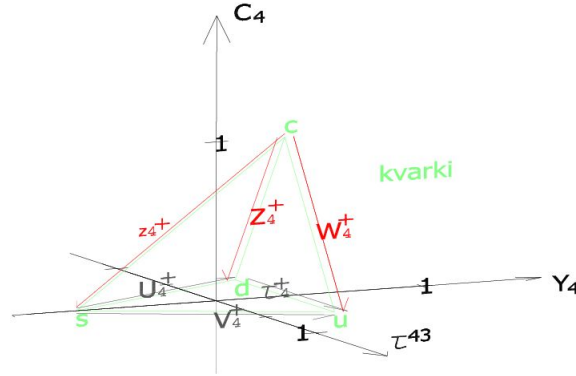
$$\hat{C}_4 \hat{U}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = C_4 \hat{U}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle \quad \hat{C}_4 \hat{z}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle = (C_4 \mp 1) \hat{z}_4^{\pm} |\tau^{43} Y_4 C_4 \rangle$$

Če to zapišemo v tabelo:

kvarki	τ_4^+	τ_4^-	V_4^+	V_4^-	U_4^+	U_4^-	W_4^+	W_4^-	Z_4^+	Z_4^-	z_4^+	z_4^-
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0) = u\rangle$	0	d	0	s	0	0	0	c	0	0	0	0
$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0) = d\rangle$	u	0	0	0	0	s	0	0	0	c	0	0
$(0, \frac{2}{3}, 0) = s\rangle$	0	0	u	0	d	0	0	0	0	0	0	c
$(0, \frac{1}{3}, 1) = c\rangle$	0	0	0	0	0	0	u	0	d	0	s	0
antikvarki	τ_4^+	τ_4^-	V_4^+	V_4^-	U_4^+	U_4^-	W_4^+	W_4^-	Z_4^+	Z_4^-	z_4^+	z_4^-
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0) = \bar{u}\rangle$	$-d$	0	$-\bar{s}$	0	0	0	$-\bar{c}$	0	0	0	0	0
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0) = \bar{d}\rangle$	0	$-\bar{u}$	0	0	$-\bar{s}$	0	0	0	$-\bar{c}$	0	0	0
$(0, \frac{2}{3}, 0) = \bar{s}\rangle$	0	0	0	$-\bar{u}$	0	$-d$	0	0	0	$-d$	$-\bar{c}$	0
$(0, \frac{1}{3}, -1) = \bar{c}\rangle$	0	0	0	0	0	0	$-\bar{u}$	0	0	0	0	$-\bar{s}$

Tabela 4: Preslikave kvarkov z SU(2) operatorji v SU(4) "prostoru".

Oz. predstavimo v "SU(4)" prostoru:



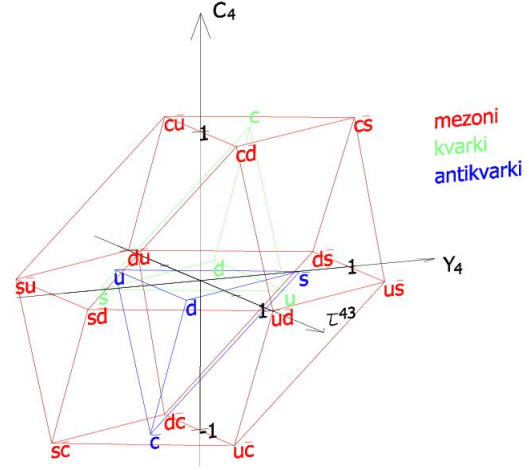
Slika 6: Preslikave kvarkov z operatorji τ_4^{\pm} , V_4^{\pm} , U_4^{\pm} , W_4^{\pm} , Z_4^{\pm} , z_4^{\pm} v prostoru (τ^{43}, Y_4, C_4) .

4.4 Gradnja SU(4) mezonov

Na že znan način lahko za mezone zapišemo tabelo lastnih vrednosti in jo predstavimo v prostoru (τ^{43}, Y_4, C_4) , kjer na os x nanašamo lastne vrednosti operatorja τ^{43} , na os y lastne vrednosti operatorja \hat{Y}_4 , na os z pa lastne vrednosti operatorja \hat{C}_4 .

mezoni	τ^{43}	Y_4	S_4	C_4	Q_4
$\kappa^+ = u\bar{s}\rangle$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	1
$\kappa^0 = d\bar{s}\rangle$	$-\frac{1}{2}$	1	1	0	0
$ s\bar{s}\rangle$	0	0	0	0	0
$F^+ = c\bar{s}\rangle$	0	1	1	1	1
$\pi^+ = u\bar{d}\rangle$	1	0	0	0	1
$ d\bar{d}\rangle$	0	0	0	0	0
$\bar{\kappa}^0 = s\bar{d}\rangle$	$\frac{1}{2}$	-1	-1	0	0
$D^+ = c\bar{d}\rangle$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	1
$ u\bar{u}\rangle$	0	0	0	0	0
$\pi^- = d\bar{u}\rangle$	-1	0	0	0	-1
$\kappa^- = s\bar{u}\rangle$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	0	-1
$D^0 = c\bar{u}\rangle$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0
$\bar{D}^0 = u\bar{c}\rangle$	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	0
$D^- = d\bar{c}\rangle$	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1	-1
$F^- = s\bar{c}\rangle$	0	-1	-1	-1	-1
$ c\bar{c}\rangle$	0	0	0	0	0

Tabela 5: Kvantna števila SU(4) mezonov.



Slika 7: Mezoni v prostoru (τ^{43}, Y_4, C_4) .

SU(4) multiplete zgradimo iz SU(3) multipletov oz. (T-Y)-multipletov (so vzporedni ravnini τ^{43} -Y); po analogiji gradnje multipletov SU(3):

$$\begin{aligned}
[14] \otimes [1\bar{4}] &= ([13]^0 \oplus [11]^1) \otimes ([1\bar{3}]^0 \oplus [11]^{-1}) = ([13] \otimes [1\bar{3}])^0 \oplus ([13]^0 \otimes [11]^{-1}) \oplus ([11]^1 \otimes [1\bar{3}]^0) \oplus ([11]^1 \otimes [11]^{-1}) = \\
&= [28]^0 \oplus [21]^0 \oplus [23]^{-1} \oplus [2\bar{3}]^1 \oplus [21]^0 = \\
&= [215] \oplus [21] \tag{23}
\end{aligned}$$

Kjer smo upoštevali, da je $[14] = [13]^0 \oplus [11]^1$, $[13] \otimes [1\bar{3}] = [28] \oplus [21]$ ter da indeks v eksponentu predstavlja lastno vrednost operatorja \hat{C} .

Torej imamo SU(4) 15-plet in SU(4) singlet. 15-plet pa lahko seveda razbijemo na SU(3) multiplete:

$$[215] \rightarrow [21] \oplus [23] \oplus [2\bar{3}] \oplus [28], \text{ kjer so:}$$

$[21] \oplus [28]$ =SU(3) nonet ($C_4 = 0$; singlet \oplus oktet): $\eta^i \oplus \eta^0, \pi^-, \pi^0, \pi^+, \kappa^0, \bar{\kappa}^0, \kappa^+, \kappa^-$;

$[23]$ = SU(3) triplet ($C_4 = 1$): D^0, F^+, D^+ ;

$[2\bar{3}]$ =SU(3) antitriplet ($C_4 = -1$): \bar{D}^0, F^-, D^- ;

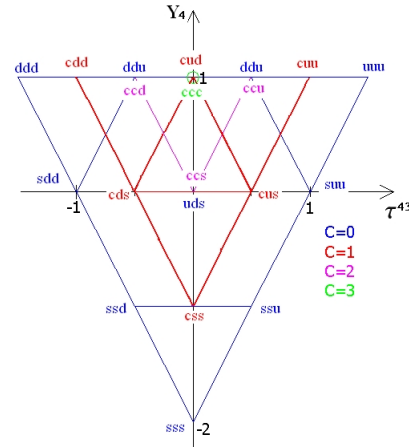
$[21]$ = SU(4) singlet ($C_4 = 0$): η_c .

V središču prostora (τ^{43}, Y_4, C_4) , v $(0, 0, 0)$, imamo štiri stanja, torej so štirikrat degenerirana. Dobimo jih na enak način kot smo dobili multiplete za grupo SU(3). Skratka:

$C_4 = 1$	$D^0 = c\bar{u}\rangle$ $F^+ = c\bar{s}\rangle$ $D^+ = c\bar{d}\rangle$	$C_4 = -1$	$\bar{D}^0 = u\bar{c}\rangle$ $\bar{F}^- = s\bar{u}\rangle$ $\bar{D}^- = d\bar{c}\rangle$
$C_4 = Y_4 = \tau^{43} = 0$	$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}\rangle - d\bar{d}\rangle)$ $\eta^0 = \frac{1}{2}(u\bar{u}\rangle + d\bar{d}\rangle - 2 s\bar{s}\rangle)$ $\eta^i = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u}\rangle + d\bar{d}\rangle + s\bar{s}\rangle)$ $\eta_c = c\bar{c}\rangle$	$C_4 = 0; Y_4, \tau^{43}$ sicer	$\pi^- = d\bar{u}\rangle$ $\pi^+ = u\bar{d}\rangle$ $\kappa^0 = d\bar{s}\rangle$ $\bar{\kappa}^0 = s\bar{d}\rangle$ $\kappa^+ = u\bar{s}\rangle$ $\kappa^- = s\bar{u}\rangle$

barioni	τ^{43}	Y_4	S_4	C_4	Q_4
uuu	$\frac{3}{2}$	1	0	0	2
uud	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1
uus	1	0	-1	0	1
uuc	1	1	0	1	2
udd	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0
uds	0	0	-1	0	0
udc	0	1	0	1	1
uss	$\frac{1}{2}$	-1	-2	0	0
usc	$-\frac{1}{2}$	0	-1	1	1
ucc	$\frac{1}{2}$	1	0	2	2
ddd	$-\frac{3}{2}$	1	0	0	-1
dds	-1	0	-1	0	-1
ddc	-1	1	0	1	0
dss	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	0	-1
dsc	$-\frac{1}{2}$	0	-1	1	0
dcc	$-\frac{1}{2}$	1	0	2	1
sss	0	-2	-3	0	-1
ssc	0	0	-2	1	0
scc	0	0	-1	2	1
ccc	0	0	0	3	2

Tabela 6: Kvantna števila za SU(4) barione.



Slika 8: SU(4) barioni v prostoru (τ^{43}, Y_4, C_4) . Različne barve pomenijo različno ravnino glede na kvantno število čudnost (C_4). Ustrezna ravnina je označena ob sliki.

4.5 Gradnja SU(4) barionov

Da ugotovimo kakšne SU(4) plete, ki jih sestavimo iz SU(3) multipletov, slednje pa iz SU(2) multipletov, imamo, izračunamo $[^14] \otimes [^14] \otimes [^14]$:

$$\begin{aligned}
[^14] \otimes [^14] &= ([^13]^0 \oplus [^11]^1) \otimes ([^13]^0 \oplus [^11]^1) = [^26]^0 \oplus [^2\bar{3}]^0 \oplus [^23]^0 \oplus [^23]^1 \oplus [^23]^1 \oplus [^21]^2 = \\
&= [^210] \oplus [^26] \tag{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
([^14] \otimes [^14]) \otimes [^14] &= ([^26]^0 \oplus [^2\bar{3}]^0 \oplus [^23]^0 \oplus [^23]^1 \oplus [^23]^1 \oplus [^21]^2) \otimes ([^13]^0 \oplus [^11]^1) = \\
&= [^310]^0 \oplus [^38]^0 \oplus [^38]^0 \oplus [^31]^0 \oplus [^36]^1 \oplus [^3\bar{3}]^1 \oplus [^36]^1 \oplus [^3\bar{3}]^1 \oplus [^36]^1 \oplus [^3\bar{3}]^1 \oplus [^33]^2 \oplus [^3\bar{3}]^2 \oplus [^33]^2 \oplus [^31]^3 = \\
&= ([^31]^3 \oplus [^33]^2 \oplus [^36]^1 \oplus [^310]^0) \oplus ([^33]^2 \oplus [^36]^1 \oplus [^3\bar{3}]^1 \oplus [^38]^0) \oplus ([^33]^2 \oplus [^36]^1 \oplus [^3\bar{3}]^1 \oplus [^38]^0) \oplus ([^3\bar{3}]^1 \oplus [^31]^0) = \\
&= [^320]' \oplus [^320] \oplus [^320] \oplus [^3\bar{4}] \tag{25}
\end{aligned}$$

Pri vseh multipletih začnemo z njihovo gradnjo iz že znanih SU(3) multipletov oz. iz stanj s $C_4 = 0$ s pomočjo SU(4) operatorjev. Dobimo:

- popolnoma antisimetričen $[^4]$ -plet

C	Y	τ^{23}	stanje
0	0	0	SU(3) popolnoma antisimetričen singlet
1	1	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(duc\rangle - udc\rangle + cdu\rangle - dcu\rangle + ucd\rangle - cud\rangle)$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(suc\rangle - usc\rangle + csu\rangle - scu\rangle + ucs\rangle - cus\rangle)$
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(sdc\rangle - dsc\rangle + csd\rangle - scd\rangle + dcs\rangle - cds\rangle)$

⁴Stanj η^0, η^i, η_c , kakršna so zapisana, ne skonstruiramo s pomočjo SU(4) operatorjev dviga/spusta oz. η_c ni pravi singlet glede na omenjene operatorje. Vendar so ta stanja linearna kombinacija vseh treh stanj, ki bi bila dobljena z operatorji: singleta ter dveh od 15-pletov. Ponavadi se za "eksperimentalna" stanja piše: $\pi^0, \eta^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle)$, $\eta^i \sim |s\bar{s}\rangle$ ter $\eta_c = |c\bar{c}\rangle$.

- poplno simetričen [20]³-plet

C	Y	τ^{23}	stanje
0			SU(3) popolnoma simetričen deкупlet
1	1	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uuc\rangle + ucu\rangle + cuu\rangle)$
1	1	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(udc\rangle + ucd\rangle + duc\rangle + dcu\rangle + cud\rangle + cd u\rangle)$
1	1	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ddc\rangle + dcd\rangle + cdd\rangle)$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(usc\rangle + ucs\rangle + suc\rangle + scu\rangle + cus\rangle + cus\rangle)$
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(dsc\rangle + dcs\rangle + sdc\rangle + scd\rangle + cds\rangle + csd\rangle)$
1	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ssc\rangle + scs\rangle + css\rangle)$
2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ccu\rangle + cuc\rangle + ucc\rangle)$
2	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ccd\rangle + cdc\rangle + dcc\rangle)$
2	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ccs\rangle + csc\rangle + scc\rangle)$
3	1	0	$ ccc\rangle$

- [20]-plet z mešano antisimetrijo

C	Y	τ^{23}	stanje
0			SU(3) oktet z mešano antisimetrijo
1	1	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(cuu\rangle - ucu\rangle)$
1	1	0	$\frac{1}{2}(cud\rangle - ucd\rangle + cdu\rangle - dcu\rangle)$
1	1	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(cdd\rangle - dcd\rangle)$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(cus\rangle - ucs\rangle + csu\rangle - scu\rangle)$
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(cds\rangle - dcs\rangle + csd\rangle - scd\rangle)$
1	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(css\rangle - scs\rangle)$
1	1	0	$\frac{1}{\sqrt{12}}(cdu\rangle - dcu\rangle + ucd\rangle - cud\rangle + 2 udc\rangle - 2 duc\rangle)$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(csu\rangle - scu\rangle + ucs\rangle - cus\rangle + 2 usc\rangle - 2 suc\rangle)$
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(csd\rangle - scd\rangle + dcs\rangle - cds\rangle + 2 dsc\rangle - 2 sdc\rangle)$
2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ucc\rangle - cuc\rangle)$
2	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(dcc\rangle - cdc\rangle)$
2	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(scc\rangle - csc\rangle)$

- [20]-plet z mešano simetrijo

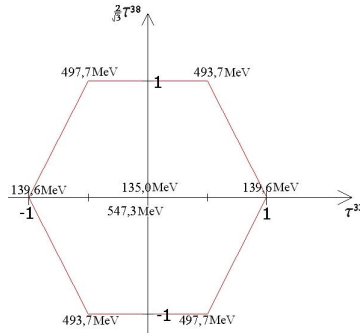
C	Y	τ^{23}	stanje
0			SU(3) oktet z mešano simetrijo
1	1	1	$\frac{1}{\sqrt{6}}(cuu\rangle + ucu\rangle - 2 uuc\rangle)$
1	1	0	$\frac{1}{\sqrt{12}}(cud\rangle + cdu\rangle + dcu\rangle + ucd\rangle - 2 duc\rangle - 2 udc\rangle)$
1	1	-1	$\frac{1}{\sqrt{6}}(cdd\rangle + dcd\rangle - 2 ddc\rangle)$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(cus\rangle + csu\rangle + ucs\rangle + scu\rangle - 2 usc\rangle - 2 suc\rangle)$
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(csd\rangle + cds\rangle + scd\rangle + dcs\rangle - 2 sdc\rangle - 2 dsc\rangle)$
1	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(css\rangle + scs\rangle - 2 ssc\rangle)$
1	1	0	$\frac{1}{2}(ucd\rangle + cud\rangle - cdu\rangle - dcu\rangle)$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(scu\rangle + csu\rangle - cus\rangle - ucs\rangle)$
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(scd\rangle + csd\rangle - cds\rangle - dcs\rangle)$
2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(ucc\rangle + cuc\rangle - 2 ccu\rangle)$
2	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(dcc\rangle + cdc\rangle - 2 ccd\rangle)$
2	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(scc\rangle + csc\rangle - 2 ccs\rangle)$

5 SU(3), SU(4) HADRONSKE MASNE FORMULE

5.1 Gell-Mann-Okubova masna formula za mezone

Če SU(3) simetrija ne bi bila kršena oz. bi bila točna simetrija močne interakcije, potem bi imeli vsi mezoni v SU(3) multipletu enako maso, saj bi bila vsa stanja SU(3) multipleta energijsko degenerirana. Seveda iz eksperimenta vemo,

da temu ni tako (glej sliko 9). Torej pride do zloma SU(3) simetrije, ki pa je kot že vemo bolj zlomljena kot simetrija izospina.



Slika 9: Ustrezna masa mezonov iz slike 4 v ravnini $(\tau^{33}, \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38})$.

Da ta zlom upoštevamo v Hamiltonjanu močne interakcije, moramo poleg starega invariantnega člana (super močna interakcija; SU(3) invarianta; ne vidi masnih razlik; degenerirani multipleti) upoštevati še nek nov člen (srednje močna interakcija), ki povzroči zlom simetrije oz. premakne degenerirana stanja. Sestavimo ga lahko iz generatorjev grupe SU(3) (in ne iz Casimirjev; le-ti ne zlomijo simetrije).

Torej: $\hat{H} = \hat{H}_i + \hat{H}_{ni}$.

Ker je razcep masnih nivojev v multipletu le ca. 20% celotne mase, rečemo, da je prispevek k masi od \hat{H}_{ni} majhen in ga obravnavamo kot perturbacijo: $\langle \hat{H}_i \rangle = m \gg \langle \hat{H}_{ni} \rangle$. Maso pa lahko zapišemo v obliki: $M = \langle \hat{H}_i \rangle + \langle \hat{H}_{ni} \rangle$.

Na tem mestu zanemarimo masno razliko zaradi elektromagnetne interakcije oz. upoštevamo, da imajo vsi člani izospinskega multipleta enako maso oz. $\{\hat{H}_{ni}, \hat{\tau}^{33}\}_- = 0$.

\hat{H}_{ni} sestavimo torej iz generatorjev SU(3) grupe, ki komutirajo s $\hat{\tau}^{33}$:

$$\hat{H}_{ni} = \sum_i m_i \hat{A}_i, \quad (26)$$

kjer je m_i konstanta pred i-tim generatorjem. Vemo, da z operatorjem $\hat{\tau}^{33}$ komutirajo \hat{Y} , $(\hat{Y})^2$, $(\hat{\tau}^3)^2$ etc. V prvem približku lahko zapišemo:

$$\hat{H}_{ni} = \alpha(\hat{Y})^2. \quad (27)$$

\hat{Y}^2 in ne \hat{Y} , ker mora biti operator, ki določa razcep mas za mezone glede na "hipernaboj" pozitivno definiten, saj je masa na sredi ravnine $(\tau^{33}, \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38})$ najmanjša. Torej:

$$M = m + \alpha \langle \tau^3 \tau^{33} Y | (\hat{Y})^2 | \tau^3 \tau^{33} Y \rangle = m + \alpha(Y)^2. \quad (28)$$

Ker smo zanemarili masno razliko zaradi elektromagnetne interakcije, pogledamo le delce z enakim nabojem oz. U-spin multiplete. Iz formule bi moralo veljati, da $M_{\eta^0} = M_{\pi^0}$, vendar eksperiment da: $M_{\eta^0} - M_{\pi^0} = 412,3 MeV$. Zato moramo formulo popraviti. Vemo, da se η^0 ter π^0 ne razlikujeta v Y , τ^{33} in da se razlikujeta v τ^3 . Vemo tudi še, da $\hat{\tau}^3$ ne komutira s $\hat{\tau}^{33}$ vendar z $(\hat{\tau}^3)^2$.

Nov Hamiltonjan je sedaj:

$$\hat{H}_{ni} = \alpha(\hat{Y})^2 + \beta(\hat{\tau}^3)^2 \quad (29)$$

nova masna formula pa

$$M = m + \alpha(Y)^2 + \beta\tau^3(\tau^3 + 1). \quad (30)$$

Koeficienta α ter β se pa določi iz meritev ob upoštevanju masne formule:

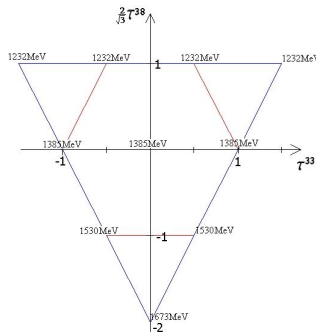
delec	Y	τ	M
κ	-1,1	$\frac{1}{2}$	$m + \alpha + \frac{3}{4}\beta$
η	0	0	m
π	0	1	$m + 2\beta$

Tabela 7: Rezultati masne formule 30 za mezone.

Vemo, da so mezoni bosoni. Zato se pokoravajo Klein - Gordonovi enačbi $\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$ v kateri nastopa kvadrat mase in ne masa. Zato sta M in m v masni formuli kar M^2 in m^2 .

5.2 Gell-Mann-Okubova masna formula za barione

Najprej si pogledimo barionski deкупlet:



Slika 10: Masa stanj barionskega deкупleta iz slike 13.

Ponovno postopamo na enak način: zanemarimo $\hat{\tau}^{33}$ razcep, medtem ko pa \hat{Y} razcepa ne gre. Iz meritev pa je tudi očitno, da s padajočim Y masa raste kot tudi da z razliko od mezonskega okteta tukaj niti dve stanji z različnim Y nimata iste mase. Zato pozitivna definitnost operatorja $(\hat{Y})^k$ ($k = 1 : \infty$) ni potrebna. Prav tako ni na nobenem Y nivoju dveh različno velikih mas. Zato v razcepu ne upoštevamo odvisnosti od $\hat{\tau}^3$. Torej je prvi približek kar:

$$\hat{H}_{ni} = \alpha \hat{Y}. \quad (31)$$

Masna formula pa je oblike:

$$M = m + \alpha Y. \quad (32)$$

Glede na eksperimentalne podatke lahko rečemo, da je ta masna formula za barionski deкупlet pravilna:

ΔM	masna formula	eksperiment [MeV]
$M_\Xi - M_\Omega$	α	142.5
$M_\Sigma - M_\Xi$	α	145
$M_\Delta - M_\Sigma$	α	153

Tabela 8: Rezultati masne formule 32 za barionski deкупlet.

Ko pa to masno formulo želimo uporabiti še za barionski oktet z masami predstavljenimi na sliki 11, vidimo, da to ne bo šlo kajti v $(\tau^{33}, \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38}) = (0, 0)$ imamo dve stanji z različnima masama, ki se razlikujeta le v τ^3 .

Vidimo pa tudi, da tudi v tem primeru ne rabimo zahtevati pozitivne definitnosti operatorja \hat{Y} . Tako je prvi približek za Hamiltonjan srednje močne interakcije za barionski oktet:

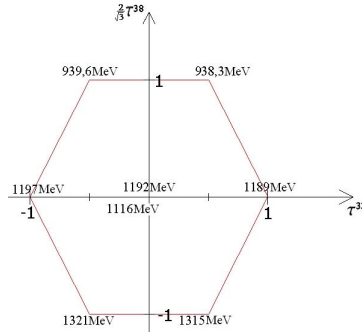
$$\hat{H}_{ni} = \alpha \hat{Y} + \beta (\hat{\tau}^3)^2. \quad (33)$$

Masna formula pa se glasi:

$$M = m + \alpha Y + \beta \tau^3 (\tau^3 + 1). \quad (34)$$

Ta formula sicer deluje, vendar predstavlja slabo aproksimacijo. Tako dodamo še en člen v popravku k Hamiltonjanu:

$$\hat{H}_{ni} = \alpha \hat{Y} + \beta (\hat{\tau}^3)^2 + \gamma (\hat{Y})^2. \quad (35)$$



Slika 11: Ustrezna masa mezonov iz slike 4 v ravnini $(\tau^{23}, 2\tau^{13})$.

Popravljen masna formula je potemtakem:

$$M = m + \alpha Y + \beta \tau^3(\tau^3 + 1) + \gamma(Y)^2. \quad (36)$$

S to formulo pa smo popravili prejšni približek za red velikosti.

Sedaj pa želimo, da bi ta masna formula veljala tudi za barionski deкупlet. Kaj ugotovimo? Da smo z dodatnimi členi pokvarili dobro ujemanje z eksperimentom. Tako zahtevamo, da je na novo dodani člen po zapisu enak staremu oz. $\beta \tau^3(\tau^3 + 1) + \gamma(Y)^2 = m_1 + m_2 Y$. V zahtevo vstavimo tri stanja in dobimo, da je $\gamma = -\frac{1}{4}\beta$ oz. dobimo Gell-Mann-Okubovo masno formulo, ki velja za vse SU(3) hadronske multiplete:

$$M = m + \alpha Y + \beta(\tau^3(\tau^3 + 1) - \frac{1}{4}(Y)^2). \quad (37)$$

Zavedati se moramo le, da je za mezone masa pravzaprav kvadrat mase in da moramo iz masne formule odstraniti Y , za barione, ki pa so fermioni in se pokoravajo Diracovi enačbi $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ pa je masa kar masa.

5.3 SU(4) Gell-Mann-Okubova masna formula za hadrone

Okusna SU(4) masna formula se po analogiji SU(3) hadronske masne formule glasi:

$$M = m + \alpha Y + \beta(\tau^4(\tau^4 + 1) - \frac{1}{4}(Y)^2) + \delta C_4. \quad (38)$$

Tu je C_4 lastna vrednost operatorja \hat{C}_4 , ki je operator šarma (komutira s $\hat{\tau}^{43}$) in je bil obravnavan že v poglavju 4.2. Ta formula dobro drži za barione. V primeru mezonov pa jo moramo malce spremeniti: kot vedno rečemo, da je masa kar masa kvadrat, Y odstranimo in zahtevamo pozitivno definitnost operatorja $(\hat{C}_4)^k$ ($k = 1 : \infty$). Tako je prvi približek za mezone kar:

$$M = m + \beta(\tau^4(\tau^4 + 1) - \frac{1}{4}(Y)^2) + \delta(C_4)^2. \quad (39)$$

6 OKUS:SU(3)⊗SPIN:SU(2) HADRONI ter BARVA

6.1 Barva

V poglavjih 2 in 3.2 je bil uveden pojem barve oz. barvne SU(3) simetrije.

Vsakemu kvarku oz. antikvarku pripišemo barvo oz. antibarvo. V primeru mezonov, ko sklapljamo delec ter antidelec, hkrati tudi sklapljamo barvo ter antibarvo. SU(3) reprezentacija barve-antibarve je popolnoma enaka kot okusna SU(3) reprezentacija kvarka-anrikvarka: vse kar je potrebno formalno narediti je zamenjati simbole: u-R, d-G, s-B. Enako velja pri sklapljanju treh barv oz. treh kvarkov (barioni)

Postulat. Vsi hadroni so brezbarvni oz. pripadajo singletnim reprezentacijam barve grupe.

Iz tega postulata lahko takoj ugotovimo, da je edino možno "barvno mezonsko stanje"

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(|R\bar{R}\rangle + |G\bar{G}\rangle + |B\bar{B}\rangle). \quad (40)$$

Valovne funkcije mezonov lahko sedaj zapišemo v malce bolj celoviti obliki:

$$|\psi\rangle = |okusni\ del\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|R\bar{R}\rangle + |G\bar{G}\rangle + |B\bar{B}\rangle). \quad (41)$$

$|okusni\ del\rangle$ pa je lahko pravzaprav katerakoli izračunana okusna valovna funkcija mezonov ($SU(3)$, $SU(4)$,...). Enako velja v primeru barionov le da zamenjamo barvni del valovne funkcije bariona

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(|BGR\rangle - |BRG\rangle + |GRB\rangle - |RGB\rangle + |RBG\rangle - |GBR\rangle), \quad (42)$$

ki pa je popolnoma antisimetrična. Torej:

$$|\psi\rangle = |okusni\ del\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|BGR\rangle - |BRG\rangle + |GRB\rangle - |RGB\rangle + |RBG\rangle - |GBR\rangle). \quad (43)$$

6.2 $SU(3)\otimes SU(2)$ mezoni

Vemo, da je valovna funkcija hadronov sestavljena iz prostorko-časovne ter okusne, barvne in spinske valovne funkcije. Seveda sem rekla, da je orbitalna vrtilna količina enaka 0 oz. sem rekla, da je prostorska valovna funkcija simetrična. Okusno valovno funkcijo sem obravnavala vse do sedaj, tako da je tudi ta že znana. V prejšnjem poglavju pa sem uvedla še barvno valovno funkcijo. Manjka torej le še spinski del. V navadi je, da se spinski prostor direktno sklopi z okusnim. Torej $SU(3)\otimes SU(2)$ (okus-spin).

Torej iz tripletne fundamentalne predstavitve $SU(3)$ grupe ($|u\rangle$, $|d\rangle$, $|s\rangle$) dobimo sekstet $|qs\rangle = |q\rangle \otimes \chi_{\frac{1}{2}\mu}$ ($|u\uparrow\rangle = |u\rangle \otimes \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $|u\downarrow\rangle = |u\rangle \otimes \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$, $|d\uparrow\rangle = |d\rangle \otimes \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $|d\downarrow\rangle = |d\rangle \otimes \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$, $|s\uparrow\rangle = |s\rangle \otimes \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $|s\downarrow\rangle = |s\rangle \otimes \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$), ki je fundamentalna predstavitev $SU(6)$ grupe. Enako vleja za antitriplet oz. antisekstet (le $SU(3)$ okuse zamenjamo z antiokusi).

Da ugotovimo kakšne plete imamo, uvedemo novo “reprezentacijo”:

$[{}^6]SU(6) \rightarrow [{}^{\{3\},\frac{1}{2}}] SU(3) \otimes SU(2)$ oz.

$[{}^{\bar{6}}]SU(6) \rightarrow [{}^{\{\bar{3}\},\frac{1}{2}}] SU(3) \otimes SU(2)$, kjer je zapis

$[{}^{\{plet\},celoten\ spin}] SU(3) \otimes SU(2)$

Torej lahko za mezone zapišemo:

$$[{}^{\{13\},\frac{1}{2}}] \otimes [{}^{\{\bar{1}\bar{3}\},\frac{1}{2}}] = [{}^{\{13\}} \otimes [{}^{\{\bar{1}\bar{3}\}}, 1] \oplus [{}^{\{13\}} \otimes [{}^{\{\bar{1}\bar{3}\}}, 0] = [{}^{\{28\}}, 1] \oplus [{}^{\{21\}}, 1] \oplus [{}^{\{28\}}, 0] \oplus [{}^{\{21\}}, 0], \quad (44)$$

kjer zapis pomeni $[{}^{\{število\ delcev\ v\ pletu\}plet}, celoten\ spin]$.

Do sedaj sem obravnavala le mezonski nonet s celotnim spinom 0 (singlet v spinu; psevdoskalarni mezoni: $J^P = 0^-$, kjer je $J = L + S$, $P = -(-1)^L$ pa je parnost bozonov). Kot vidimo iz računa, pa obstajajo še trije drugi noneti (spinski triplet; vektorski mezoni: $J^P = 1^-$), To vemo tudi iz meritev, saj so zaznali delce z isto kvarkovsko sestavo a različno maso. Razlika v masi je potemtakem posledica razlike v spinu.

Novo valovno funkcijo za mezone lahko sestavimo kot smo sestavljali prej: vzamemo npr. stanje z maksimalno utežjo s spinom $|\uparrow\uparrow\rangle$. Ostale iz okteta oz. noneta dobimo s preslikavami z operatorji $\hat{\tau}^\pm$, \hat{U}^\pm , \hat{V}^\pm oz. z upoštevanjem ortogonalnosti. Seveda se s tem spinski del ne spremeni oz. z drugimi besedami: cel nonet ima enako spinsko valovno funkcijo. Ostale mezone z isto kvarkovsko sestavo vendar “nižjimi” projekcijami spina pa dobimo z operatorjem

$$\hat{S}^- \chi_{s,m} = \sqrt{s(s+1) - m(m-1)} \chi_{s,m-1}, \quad (45)$$

ki je tukaj dvodelčen operator: $\hat{S}^- = \hat{S}^-(1) + \hat{S}^-(2)$. Singletno valovno funkcijo spina pa dobimo z upoštevanjem ortogonalnosti na stanje tripleta s spinom $|1,0\rangle$. Lahko pa si pomagamo s Clebsch-Gordanovimi koeficienti (glej 9):

$$\psi_{Y_1\tau_1^3 s_1 m_{s1} Y_2\tau_2^3 s_2 m_{s2}}^{\tau_1^3, \tau_2^3, S, M_S} = \sum_{\tau_1^{33}, \tau_2^{33}, m_{s1}, m_{s2}} \begin{pmatrix} \tau_1^3 & \tau_2^3 & | \tau^3 \\ \tau_1^{33} & \tau_2^{33} & | \tau^{33} \end{pmatrix} \psi_{Y_1\tau_1^3 s_1 m_{s1}} \psi_{Y_2\tau_2^3 s_2 m_{s2}} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & | S \\ m_{s1} & m_{s2} & | M_S \end{pmatrix} \chi_{s_1 m_{s1}} \chi_{s_2 m_{s2}}, \quad (46)$$

vendar ta enačba velja le za stanja z istim celotnim spinom; drugače pa je potrebno upoštevati še izoskalarni faktor.

Tako dobimo isti okusni del kot prej, le da je pomnožen še s spinsko valovno funkcijo. Torej:

- oktet

$$- SU(3)\otimes SU(2)^{1,1}: |okus\rangle |\uparrow\uparrow\rangle^5$$

⁵ $SU(2)^{S,M_S} = SU(2)^{celoten\ spin, projekcija\ spina}$

- $SU(3) \otimes SU(2)^{1,0}$: $|okus\rangle > \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$
- $SU(3) \otimes SU(2)^{1,-1}$: $|okus\rangle > |\downarrow\downarrow\rangle$

- singlet

- $SU(3) \otimes SU(2)^{0,0}$: $|okus\rangle > \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$

Seveda je vse še direktno pomnoženo z barvno valovno funkcijo za mezone 40. Npr. stanje z maksimalno utežjo za psevdoskalarni mezon v osnovnem stanju:

$$\pi^+ = |u\bar{d}\rangle > \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{3}}(|R\bar{R}\rangle + |G\bar{G}\rangle + |B\bar{B}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_\uparrow\bar{d}_\downarrow\rangle - |u_\downarrow\bar{d}_\uparrow\rangle) \frac{1}{\sqrt{3}}(|R\bar{R}\rangle + |G\bar{G}\rangle + |B\bar{B}\rangle).$$

6.3 $SU(3) \otimes SU(2)$ barioni

Barione pa lahko z upoštevanjem, da so fermioni, obravnavamo še na malce drugačen način. Vemo, da zaradi Paulijevega izključitvenega načela mora biti celotna valovna funkcija fermionov popolnoma antisimetrična. Vemo, da je prostorska valovna funkcija simetrična ter da je barvna antisimetrična. Tako morata biti okusna in spinska valovna funkcija skupaj simetrični. Torej ali sta oba dela simetrična ali oba anisimetrična. Obstaja pa še tretja možnost: okus z mešano simetrijo \otimes spin z mešano simetrijo + okus z mešano antisimetrijo \otimes spin z mešano antisimetrijo. Lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} SU(3) \otimes SU(2) &= ([^1\mathbf{3}] \otimes [^1\mathbf{3}] \otimes [^1\mathbf{3}]) \otimes ([^1\mathbf{2}] \otimes [^1\mathbf{2}] \otimes [^1\mathbf{2}]) = \\ &= ([^3\mathbf{10}] \oplus [^3\mathbf{8}] \oplus [^3\mathbf{8}] \oplus [^3\mathbf{1}]) \otimes ([^3\mathbf{4}] \oplus [^3\mathbf{2}] \oplus [^3\mathbf{2}]) = \\ &= (S \oplus M_S \oplus M_A \oplus A) \otimes (S \oplus M_S \oplus M_A). \end{aligned} \quad (47)$$

Imamo torej le dve možnosti:

$$(10, 4) = \{[^3\mathbf{10}], \frac{3}{2}\} \quad (48)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[(8, 2) + (8, 2)] = \frac{1}{\sqrt{2}}(\{[^3\mathbf{8}], \frac{1}{2}\} + \{[^3\mathbf{8}], \frac{1}{2}\}). \quad (49)$$

To se pa ujema z eksperimenti. Obstaja namreč le 56 stanj. Število stanj v deкупletu je 40 ($=10 \times (2s+1)$; $s = \frac{3}{2}$), v oktetu pa 16 ($=8 \times (2s+1)$; $s = \frac{1}{2}$). Torej obstaja le $SU(6)$ 56-plet (pričakovali pa bi še tri plete: [70], [70], [20]; le-ti pa niso simetrični).

Sedaj pa postopamo povsem enako kot v primeru mezonov: okusni del valovne funkcije pomnožimo s spinskim delom:

- deкупlet

- $SU(3) \otimes SU(2)^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}$: $|okus\rangle > |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$
- $SU(3) \otimes SU(2)^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}$: $|okus\rangle > \frac{1}{\sqrt{3}}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle)$
- $SU(3) \otimes SU(2)^{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}$: $|okus\rangle > \frac{1}{\sqrt{3}}(|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle)$
- $SU(3) \otimes SU(2)^{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}$: $|okus\rangle > |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$

- oktet

- $SU(3) \otimes SU(2)^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$:
 $|okus\rangle_{M_A} \chi_{M_A} + |okus\rangle_{M_S} \chi_{M_S} =$
 $= |okus\rangle_{M_A} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) + |okus\rangle_{M_S} \frac{1}{\sqrt{6}}(|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - 2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$
- $SU(3) \otimes SU(2)^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$:
 $|okus\rangle_{M_A} \chi_{M_A} + |okus\rangle_{M_S} \chi_{M_S} =$
 $= |okus\rangle_{M_A} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle) + |okus\rangle_{M_S} \frac{1}{\sqrt{6}}(|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - 2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$

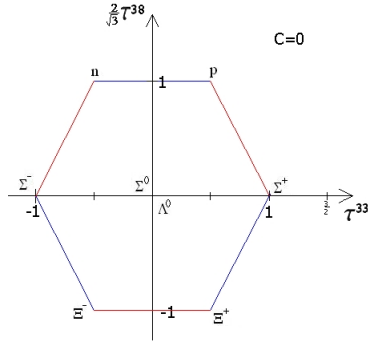
χ_{M_S} tu predstavlja spinsko valovno funkcijo z mešano simetrijo, χ_{M_A} pa spinsko valovno funkcijo z mešano antisimetrijo.

Vse barionske valovne funkcije pa pomnožimo še z izrazom 42. Tako dobimo antisimetrično valovno funkcijo. Največkrat omenjani stanji sta nevtron ter proton, ki ju lahko zapišemo kot (brez barvnega dela oz. brez izraza 42):

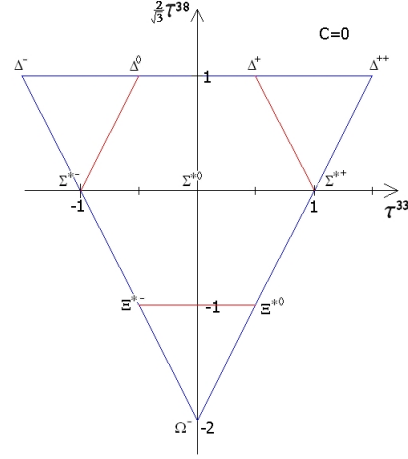
$$|p_\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}[2|u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow\rangle + 2|u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow\rangle + 2|d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow\rangle - |u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\rangle - |u_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow\rangle - |u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow\rangle -$$

$$\begin{aligned}
& -|d_{\uparrow}u_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle - |d_{\uparrow}u_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle - |u_{\downarrow}u_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle \\
|n_{\uparrow}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{18}}[2|d_{\uparrow}d_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle + 2|u_{\downarrow}d_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle + 2|d_{\uparrow}u_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle - |d_{\uparrow}d_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle - |d_{\downarrow}u_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle - |u_{\uparrow}d_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle - \\
& -|d_{\downarrow}d_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle - |d_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle - |u_{\uparrow}d_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle].
\end{aligned}$$

Ostali barioni okteta pa so na sliki 12, barioni deкупleta pa na 13.



Slika 12: Barioni okteta v ravnini (τ^{33}, Y) .



Slika 13: Barioni deкупleta v ravnini (τ^{33}, Y) .

7 $SU(3) \otimes SU(2)$, $SU(4) \otimes SU(2)$ HADRONSKE MASNE FORMULE

Predpostavka. Del Hamiltonke, ki zlomi simetrijo, je skalar v spinskem prostoru: $\{\hat{H}_{ni}, (\hat{S})^2\}_- = 0$.

\hat{H}_{ni} torej vodi do razcepa mas delcev z različnim spinom v $SU(6)$ oz. $SU(8)$ multipletu. Posledica tega je: stanja z isto kvarkovsko sestavo a z različnim spinom imajo različno maso.

7.1 $SU(6)$ Gürsey - Radicati masna formula za hadrone

V prvem približku lahko rečemo, da $\hat{H}_{ni} \propto (\hat{S})^2$ oz.

$$\hat{H}_{ni} = \alpha \hat{Y} + \beta((\hat{\tau}^3)^2 - \frac{1}{4}(\hat{Y})^2) + \epsilon(\hat{S})^2. \quad (50)$$

Tako se masna formula, ki velja za barionski "oktet" ter "deкупlet" (za cel 56-plet) glasi:

$$M = m + \alpha Y + \beta(\tau^3(\tau^3 + 1) - \frac{1}{4}(Y)^2) + \epsilon S(S + 1). \quad (51)$$

Ujemanje z eksperimenti je še vedno zadovoljivo.

Za masno formulo $SU(6)$ mezonov pa moramo narediti ponovno že standardni spremembi: masa ja masa kvadrat, odstraniti je potrebno operator \hat{Y} . Vse ostalo ostane nespremenjeno.

7.2 $SU(8)$ Gürsey - Radicati masna formula za hadrone

S pomočjo poglavij 7.1 ter 5.3 lahko kar zapišemo $SU(8)$ masno formulo za barione:

$$M = m + \alpha Y + \beta(\tau^4(\tau^4 + 1) - \frac{1}{4}(Y)^2) + \delta C_4 + \epsilon S(S + 1). \quad (52)$$

Le-ta pa ponovno ne drži za $SU(4)$ mezone, če ne naredimo nekaj sprememb: masa je masa kvadrat, Y odstranimo, namesto C_4 pa pišemo $(C_4)^2$:

$$M = m + \beta(\tau^4(\tau^4 + 1) - \frac{1}{4}(Y)^2) + \delta(C_4)^2 + \epsilon S(S + 1). \quad (53)$$

$SU(8)$ masna formula se slabše ujema z meritvami kot $SU(6)$ masna formula iz česar lahko sklepamo, da je $SU(4)$ okusna simetrija bistveno bolj zlomljena kot pa $SU(3)$ okusna simetrija.

8 ZAKLJUČEK

V prvem oz. drugem delu tega seminarja sem obravnaval SU(3) oz. SU(4) hadronske multiplete. Sledila sta jima poglavja, ko sem okusnim prostorom kvarkom z direktnim produktom dodala spinski del in nato še barvni. Seveda so bili hadroni obravnavani le v njihovih osnovnih stanjih oz. sem rekla, da je tirna vrtilna količina $L=0$ (prostorski del valovne funkcije hadronov je simetričen).

Zlom simetrije SU(3) oz. SU(4) pa sem obravnavala v poslednjih poglavjih z obravnavo masnih formul hadronov. Iz rezultatov vemo, da je SU(4) simetrija bistveno bolj kršena kot SU(3), ki pa je tudi znatno bolj kršena v primerjavi z SU(2) simetrijo.

Torej se da grupo SU(3) odlično uporabiti za razvrstitev hadronov v multiplete ter za določitev njihovih valovnih funkcij. Za izračun lastnosti pa se je potrebno poslužiti kvantne kromodinamike (QCD) oz. kakšne njene poenostavitve (perturbativna QCD, mrežna QCD, $1/N$ razpon, kiralna perturbacijska teorija, težka kvarkovska efektivna teorija), kajti obravnava se problem velikega števila delcev, kjer oblika potenciala med kvarki ni razjasnjena, problem pa predstavlja tudi jakost močne interakcije.

9 DODATEK

9.1 Antisimetrični f^{ijk} ter simetrični d^{ijk} SU(3) tenzor

ijk	123	147	156	246	257	345	367	458	678
f^{ijk}	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

ijk	118	146	157	228	247	256	338	344	355
d^{ijk}	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

ijk	366	377	448	558	668	778	888
d^{ijk}	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$

9.2 Antisimetrični f^{ijk} ter simetrični d^{ijk} SU(4) tenzor

ijk	123	147	156	19,12	1,10,11	246	257	29,11	2,10,12	345	367	39,10	3,11,12
f^{ijk}	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

ijk	458	49,14	4,10,13	59,13	5,10,14	678	6,11,14	6,12,13	7,11,13	7,12,14	89,10
f^{ijk}	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$

ijk	8,11,12	8,13,14	9,10,15	11,12,15	13,14,15
f^{ijk}	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$

ijk	118	1,1,15	146	157	19,11	1,10,12	228	22,15	247	256	29,12	2,10,11	338
d^{ijk}	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

ijk	33,15	344	355	366	377	399	3,10,10	3,11,11	3,12,12	448	44,15	49,13
d^{ijk}	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{2}$

ijk	4,10,14	558	55,15	59,14	5,10,13	668	66,15	6,11,13	6,12,14	778	77,15
d^{ijk}	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$

ijk	7,11,14	7,12,13	888	88,15	899	8,10,10	8,11,11	8,12,12	8,13,13	8,14,14	99,15
d^{ijk}	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$

ijk	10,10,15	11,11,15	12,12,15	13,13,15	14,14,15	15,15,15
d^{ijk}	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2/3}}$

9.3 Stanja z maksimalno utežjo

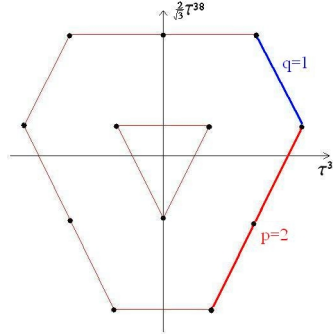
Def. Stanje $|\tau^{33}Y\rangle$ je stanje z maksimalno utežjo oz. $\psi_{max} = |\tau^{33}Y\rangle_{max} > |\tau^{33}Y'\rangle$ natanko tedaj, ko $\tau^{33} > \tau^{33'}$ in za $\tau^{33} = \tau^{33'}$ velja $Y > Y'$.

Na sliki 3 na strani 5 je stanje z maksimalno utežjo za kvarke $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, za antikvarke pa stanje $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$.

Splošno lahko zapišemo stanje z maksimalno utežjo v obliki: $|\tau^{33}Y\rangle_{max} = |\frac{p+q}{2}, \frac{p-q}{3}\rangle$, kjer $(\hat{V}^-)^{p+1}\psi_{max} = 0$ in $(\hat{V}^-)^p\psi_{max} \neq 0$ ter $(\hat{T}^-)^{q+1}(\hat{V}^-)^p\psi_{max} = 0$ in $(\hat{T}^-)^q(\hat{V}^-)^p\psi_{max} \neq 0$.

p	q	
0	0	trivialno
1	0	triplet
0	1	antitriplet
1	1	mezoni

Tabela 9: D(p,q) reprezentacija.



Slika 14: Določitev p, q.

9.4 Clebsch - Gordanovi koeficienti za grupi SU(2) ter SU(3) s sklapljanjem delec:delec oz. delec:antidelec

Vemo, da lahko stanja konstruiramo tudi s pomočjo ti. Clebsch-Gordanovih koeficientov (CGC):

$$\psi_{Y_1\tau_1^3 Y_2\tau_2^3}^{\tau^3, \tau^{33}} = \sum_{\tau_1^{33}, \tau_2^{33}} \begin{pmatrix} \tau_1^3 & \tau_2^3 & | & \tau^3 \\ \tau_1^{33} & \tau_2^{33} & | & \tau^{33} \end{pmatrix} \psi_{Y_1\tau_1^3 \tau_1^{33}} \psi_{Y_2\tau_2^3 \tau_2^{33}}, \quad (54)$$

kjer izraz v oklepaju predstavlja CGC. Seveda moramo na ta način dobiti iste valovne funkcije kot pa z delovanjem operatorjev na že znano stanje.

Za določitev CGC pa so pomembne relativne faze:

- v izomultipletu:

$$\hat{\tau}^\pm |\tau^3 \tau^{33} Y\rangle = \sqrt{\tau^3(\tau^3 + 1) - \tau^{33}(\tau^{33} \pm 1)} |\tau^3 \tau^{33} \pm 1 Y\rangle \quad (55)$$

- med različnimi izomultipleti (Biedenharn):

$$\hat{U}^\pm |\tau^3 \tau^{33} Y\rangle = u_\pm |\tau^3 + \frac{1}{2} \tau^{33} \mp \frac{1}{2} Y \pm 1\rangle + u_\mp |\tau^3 - \frac{1}{2} \tau^{33} \mp \frac{1}{2} Y \pm 1\rangle \quad (56)$$

$$\hat{V}^\pm |\tau^3 \tau^{33} Y\rangle = v_\pm |\tau^3 + \frac{1}{2} \tau^{33} \pm \frac{1}{2} Y \pm 1\rangle + v_\mp |\tau^3 - \frac{1}{2} \tau^{33} \pm \frac{1}{2} Y \pm 1\rangle \quad (57)$$

Da določimo CGC pa moramo delovati na npr. stanje z maksimalno utežjo (glej poglavje 9.3) enkrat z operatorji $\hat{\tau}^\pm$, \hat{U}^\pm , \hat{V}^\pm na oba delca kot celoto, enkrat pa na vsak delec posebj (v smislu enačb 55, 56 ter 57). Tako dobimo:

$SU(2)$	J
$d \otimes d, s \otimes s$	M
$(j_1, m_1)(j_2, m_2)$	

$SU(2)$	1
$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$	1 1 0
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1 0 0
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 1
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ -1
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	1

$SU(2)$	$\frac{3}{2}$
$1 \otimes \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$
$(1, 1)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$(1, 1)(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$(1, 0)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$
$(1, 0)(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$
$(1, -1)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{2}$
$(1, -1)(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	1

$SU(2) \subset SU(3)$	[3]
$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$	1 [3] [1]
	1 1 0
	0 0 0 [3]
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	1 0 0 1
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -1
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	1

Slika 15: CGC za grupo $SU(2)$ s sklapljanjem dveh delcev oz. dveh spinov levo ter CGC za adjungirano grupo $SU(2)$ s sklapljanjem delca in antidelca (primer je pionski triplet) desno.

$SU(3)$	[11] ²
$d \otimes d, d \otimes \bar{d}$	\mathbb{T}^3
$[11]^1 \otimes [11]^1 = [11]^2 \oplus [11]^2 \oplus \dots$	\mathbb{T}^{33}
	Y
$(T^3_1, T^{33}_1, Y_1)(T^3_2, T^{33}_2, Y_2)$	

$SU(3)$	[8] ²
$d \otimes \bar{d}$	$\frac{1}{2}$ [8] ²
$[31]^1 \otimes [32]^1 = [8]^2 \oplus [1]^2$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ [8] ²
mezoni	1 $-\frac{1}{2}$ 1 [8] ² [8] ² [1] ²
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})(0, 0, \frac{2}{3})$	1 1 1 1 0 0
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})(0, 0, \frac{2}{3})$	1 0 0 0 0 0
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	1 0 0 0 0 [8] ²
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ 1 [8] ²
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ -1 $\frac{1}{2}$ [8] ²
$(0, 0, -\frac{2}{3})(0, 0, \frac{2}{3})$	0 $-\frac{4}{3}$ $\frac{1}{3}$ 0 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	1 -1 $-\frac{1}{2}$
$(0, 0, -\frac{2}{3})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	1 -1
$(0, 0, -\frac{2}{3})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	1

$SU(3)$	[6] ²
$d \otimes d$	1 [6] ² [3] ²
$[31]^1 \otimes [32]^1 = [6]^2 \oplus [3]^2$	1 1 0
	$\frac{2}{3}$ 0 0 [6] ²
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1 [6] ² [3] ²
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ -1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ [6] ² [3] ²
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	1 $-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})(0, 0, -\frac{2}{3})$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ [6] ²
$(0, 0, -\frac{2}{3})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}$ 0
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})(0, 0, -\frac{2}{3})$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0
$(0, 0, -\frac{2}{3})(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $-\frac{2}{3}$
$(0, 0, -\frac{2}{3})(0, 0, \frac{2}{3})$	1

Slika 16: CGC za grupo $SU(3)$ s sklapljanjem dveh delcev na sredi ter CGC za sklapljanje delca in antidelca (mezoni) spodaj.

The image displays two Dynkin diagrams for the SU(3) group, used to calculate Clebsch-Gordan coefficients (CGC) for the decomposition of the product of three fundamental representations into baryons. The top diagram shows the decomposition into the $[10]$ and $[8]$ representations, while the bottom diagram shows the decomposition into the $[8]$ and $[1]$ representations. Each diagram consists of a chain of nodes with associated CGC values.

Slika 17: CGC za grupo $SU(3)$ s sklapljanjem treh delcev (barioni).

Kazalo

1	UVOD	2
2	IZOSPIN in $SU(2)$ OKUSNA SIMETRIJA	2
3	GRUPA $SU(3)$ in HADRONSKI MULTIPLETI	3
3.1	Algebra grupe $SU(3)$	3
3.2	$(\tau^{33}, \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38})$ ravnina ter barvna (točna) $SU(3)$ simetrija	3
3.3	Generatorji podgrup grupe $SU(3)$	4
3.4	Barve "zamenjamo" z delci	5
3.5	Gradnja mezonov	6
3.6	Razvrstitev mezonov v singlet...	7
3.7	Gradnja barionov	8
4	GRUPA $SU(4)$ in HADRONSKI MULTIPLETI	9
4.1	Algebra grupe $SU(4)$	9
4.2	(τ^{43}, Y_4, C_4) prostor	10
4.3	Generatorji podgrup grupe $SU(4)$	11
4.4	Gradnja $SU(4)$ mezonov	12
4.5	Gradnja $SU(4)$ barionov	14
5	$SU(3), SU(4)$ HADRONSKE MASNE FORMULE	15
5.1	Gell-Mann-Okubova masna formula za mezone	15
5.2	Gell-Mann-Okubova masna formula za barione	17
5.3	$SU(4)$ Gell-Mann-Okubova masna formula za hadrone	18

6	OKUS:SU(3)⊗SPIN:SU(2) HADRONI ter BARVA	18
6.1	Barva	18
6.2	SU(3)⊗SU(2) mezoni	19
6.3	SU(3)⊗SU(2) barioni	20
7	SU(3)⊗SU(2), SU(4)⊗SU(2) HADRONSKE MASNE FORMULE	21
7.1	SU(6) Gürsey - Radicati masna formula za hadrone	21
7.2	SU(8) Gürsey - Radicati masna formula za hadrone	21
8	ZAKLJUČEK	22
9	DODATEK	22
9.1	Antisimetrični f^{ijk} ter simetrični d^{ijk} SU(3) tenzor	22
9.2	Antisimetrični f^{ijk} ter simetrični d^{ijk} SU(4) tenzor	22
9.3	Stanja z maksimalno utežjo	22
9.4	Clebsch - Gordanovi koeficienti za grupi SU(2) ter SU(3) s sklapljanjem delec:delec oz. delec:antidelec	23

Literatura

- [1] W. Greiner, B. Müller. *Quantum mechanics symmetries*. Springer, Berlin, 1994.
- [2] F. J. Dyson. *Symmetry groups in nuclear and particle physics*. W. A. Benjamin, New York, 1966.
- [3] J. F. Cornwell. *Group theory in physics*. Academic press, London, 1997.
- [4] M. Kaku. *Quantum field theory*. Oxford university press, New York, 1993.
- [5] H. F. Jones. *Groups, representations and physics*. J. W. Arrowsmith, Bristol, 1998.
- [6] F. Halzen, A. D. Martin. *Quarks and leptons*. John Wiley, New York, 1984.
- [7] Yee-Yen Lee, Shan-Yeong Lin. *Crossing Matrices Concerning the Fundamental Triplet of SU(3)*. Chinese Journal of Physics, Vol. 5, No. 2, 1967.
- [8] H. T. Williams. *SU(3) isoscalar factors*. hep-th, 3:9509167, 1995.
- [9] H. T. Williams. *Gell-Mann-Okubo Mass Formula for SU(4) Meson Hexadecuplet*. hep-ph, 1:9608300, 1996.
- [10] Mu-Lin Yan, Xin-He Meng. *Improved Gell-Mann-Okubo Relations and SU(3) Rotation Excitations of Baryon States*. hep-ph, 2:0402072, 2004.
- [11] D. O. Riska. *Nucleon Resonance Structure*. Cosy Summer School, Vol. 1, No. 1, 2003.
- [12] P. Bicudo, N. Brambilla, E. Ribeiro and A. Vairo. *Confinement and chiral symmetry breaking in heavy-light quark systems*. hep-ph, 1:9807460, 1998.