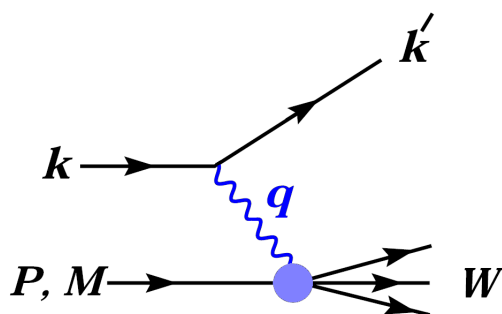


Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za fiziko

Jedra in osnovni delci

Domača naloga

Strukturne funkcije



Barbara Horvat

Julij 2007, Ljubljana

Kazalo

1	Globoko neelastično sipanje	3
2	Sipalni presek	3
3	Strukturne funkcije	5
4	Strukturne funkcije v kvark-partonskem modelu	7
5	Strukturne funkcije SU(3) barionskega okteta v kvark-partonskem modelu	8
6	Zaključek	10

1 Globoko neelastično sipanje

Visoko energijsko sipanje leptona na nukleonu (globoko ($Q^2 \gg M^2$) neelastično ($W^2 \gg M^2$) sipanje) igra glavno vlogo pri določevanju partonske strukture protona¹. Na sliki na platnici so predstavljene kinematične količine pri globokem neelastičnem sipanju. k ter k' sta 4-vektorja gibalne količine leptona, P je četverec gibalne količine nukleona z maso M , W pa je invariantna masa končnega hadronskega stanja:

$$W^2 = (P + q)^2 = M^2 + 2M\nu - Q^2, \quad (1)$$

kjer je

$$\nu = \frac{q \cdot P}{M} = E - E' \quad (2)$$

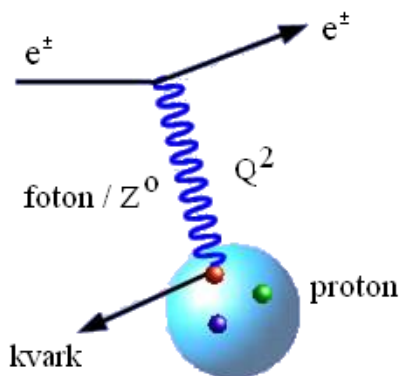
energijska izguba leptona v mirovnem sistemu nukleona, E začetna energija leptona, E' pa končna energija leptona prav tako v mirovnem sistemu nukleona,

$$Q^2 = -q^2 = 2(EE' - \vec{k} \cdot \vec{k}') - m_l^2 - m_{l'}^2, \quad (3)$$

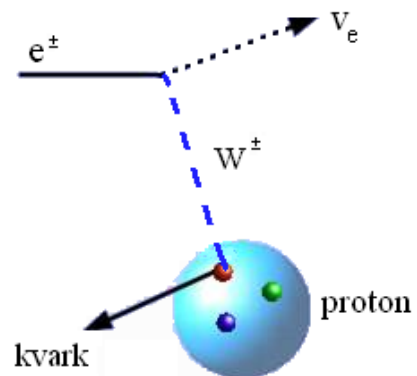
kjer je m_l začetna masa leptona, $m_{l'}$ pa končna masa leptona². Izmenjalni delec je lahko γ , Z^0 ali pa W^\pm , ki prenese 4-vektor gibalne količine leptona nukleonu:

$$q = k - k'. \quad (4)$$

Od tipa prenašalnega delca pa je tudi odvisno, kakšna reakcija bo potekla:



Slika 1: Reakcija z nevtralnim nabojem.



Slika 2: Reakcija z nabitim nabojem.

2 Siplni presek

V najnižjem redu perturbacijske teorije lahko zapišemo presek za sipanje polariziranih leptonov na polariziranem nukleonu kot produkt leptonskega ter hadronskega tenzorja (sklopitev izmenjanega bozona v zgornjem ter spodnjem verteksu na sliki na platnici)

$$\frac{d^2\sigma}{dxdy} = \frac{2\pi y\alpha^2}{Q^4} \sum_j \eta_j L_j^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^\eta, \quad (5)$$

¹Hadroni so v kvark-partonskem modelu sestavljeni iz več delov: partonov (valenčni kvarki/antikvarki ter morje parov kvark-antikvark) ter gluonov, ki ne nosijo električnega naboja.

²Začetna ter končna masa leptona sta v nadaljnjem procesu zanemarjeni.

kjer sta

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (6)$$

$$y = \frac{q \cdot P}{k \cdot P}, \quad (7)$$

x v kvark-partonskem modelu predstavlja del nukleonove gibalne količine, ki ga nosi parton, ki je sodeloval pri trku, y pa je delež leptonove energije izgubljene v mirovnem sistemu nukleona.

Pri procesu z nevtralnimi tokom gre sumacija (j) preko γ , Z ter γZ . Prvo predstavlja izmenjavo fotona, drugo delca Z , tretje pa interferenco med slednjima (glej sliko (1)). Pri procesu z nabitimi tokom pa obstaja le izmenjava delca W oz. $j = W$ (glej sliko (2)).

V enačbi (5) je $L_{\mu\nu}$ leptonski tenzor povezan s sklopitvijo izmenjalnega bozona z leptonom. Za prihajajoče leptone naboja $e = \pm 1$, sučnosti $\lambda = \pm 1$ velja

$$L_{\mu\nu}^\gamma = 2(k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - k \cdot k' g_{\mu\nu} - i\lambda \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k^\alpha k'^\beta) \quad (8)$$

$$L_{\mu\nu}^{\gamma Z} = (g_V^e + e\lambda g_A^e) L_{\mu\nu}^\gamma \quad (9)$$

$$L_{\mu\nu}^Z = (g_V^e + e\lambda g_A^e)^2 L_{\mu\nu}^\gamma \quad (10)$$

$$L_{\mu\nu}^W = (1 + e\lambda)^2 L_{\mu\nu}^\gamma, \quad (11)$$

kjer je

$$g_A^e = -\frac{1}{2} \quad (12)$$

$$g_V^e = -\frac{1}{2} - 2e \sin^2 \theta, \quad (13)$$

kjer je θ sipalni kot leptona glede na leptonski vhodni žarek. V primeru, ko prihajajoči lepton ni elektron, temveč je nevtrino, izraz (11) za $L_{\mu\nu}^W$ še vedno velja, le e ter λ ustrezata izhodnemu nabitemu leptonu.

V enačbi (5) faktor η_j predstavlja kvadrat razmerja med ustreznim propagatorjem ter sklopitvijo glede na reakcijo s fotonom

$$\eta_\gamma = 1 \quad (14)$$

$$\eta_{\gamma Z} = \left(\frac{M_Z^2}{2\sqrt{2}\pi\alpha}\right) \left(\frac{Q^2}{Q^2 + M_Z^2}\right) \quad (15)$$

$$\eta_Z = \eta_{\gamma Z}^2 \quad (16)$$

$$\eta_W = \frac{1}{2} \left(\frac{M_W^2}{4\pi\alpha}\right)^2 \left(\frac{Q^2}{Q^2 + M_W^2}\right)^2. \quad (17)$$

Hadronski tenzor, ki pa opisuje interakcijo ustreznega elektrošibkega toka s tarčo (nukleonom) pa je podan z

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \int \langle P, S | [J_\mu^\dagger(z), J_\nu(0)] | P, S \rangle e^{iq \cdot z} d^4z, \quad (18)$$

kjer je S nukleonov 4-vektor spina in velja

$$S^2 = -M^2 \quad (19)$$

$$S \cdot P = 0 \quad (20)$$

3 Strukturne funkcije

Strukturne funkcije so definirane kot sestavni deli hadronskega tenzoja

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu} = & \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) F_1(x, Q^2) + \frac{\hat{P}_\mu \hat{P}_\nu}{P \cdot q} F_2(x, Q^2) - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha P^\beta}{2P \cdot q} F_3(x, Q^2) + \\
& + i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q^\alpha}{P \cot q} \left[S^\beta g_1(x, Q^2) + \left(S^\beta - \frac{S \cdot q}{P \cdot q} P^\beta \right) g_2(x, Q^2) \right] + \\
& + \frac{1}{P \cdot q} \left[\frac{1}{2} \left(\hat{P}_\mu \hat{S}_\nu + \hat{S}_\mu \hat{P}_\nu \right) - \frac{S \cdot q}{P \cdot q} \hat{P}_\mu \hat{P}_\nu \right] g_3(x, Q^2) + \\
& + \frac{S \cdot q}{P \cdot q} \left[\frac{\hat{P}_\mu \hat{P}_\nu}{P \cdot q} g_4(x, Q^2) + \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) g_5(x, Q^2) \right], \tag{21}
\end{aligned}$$

kjer je

$$\hat{P}_\mu = P_\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q_\mu \tag{22}$$

$$\hat{S}_\mu = S_\mu - \frac{S \cdot q}{q^2} q_\mu \tag{23}$$

V izrazu (21) predstavljajo F_1 , F_2 ter F_3 strukturne funkcije za primer nepolariziranih nukleonov, g_1 , g_2 , g_3 , g_4 ter g_5 pa strukturne funkcije za primer polariziranih nukleonov.

Sipalni presek za nevtralen oz. nabit tok pri globoko neelastičnem sipanju na nepolariziranih nukleonih se s strukturnimi funkcijami glasi:

$$\frac{d^2\sigma^i}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha^2}{xyQ^2} \eta^i \left[y^2 x F_1^i + \left(1 - y - \frac{x^2 y^2 M^2}{Q^2} \right) F_2^i \mp \left(y - \frac{y^2}{2} \right) x F_3^i \right], \tag{24}$$

kjer je $i = \mathcal{J}_{ne}$, \mathcal{J}_{na} nevtralen ($eN \rightarrow eX$) oz. nabit tok ($eN \rightarrow \nu X$ oz. $\nu N \rightarrow eX$).

V zadnjem faktorju enačbe (24) velja predznak $-$ za prihajajoče e^+ oz. $\bar{\nu}$ ter predznak $+$ za prihajajoče e^- oz. ν .

Za nevtralen nepolariziran e^\pm žarek velja

$$\eta^{\mathcal{J}_{ne}} = 1, \tag{25}$$

za nabit nepolariziran l^\pm (l je lepton) žarek pa

$$\eta^{\mathcal{J}_{na}} = (1 \pm \lambda)^2 \eta_W, \tag{26}$$

kjer je \pm za l^\pm , λ pa sučnost prihajajočega leptona.

V primeru nenabitega toka se strukturne funkcije zapišejo kot

$$F_1^{\mathcal{J}_{ne}} = F_1^\gamma - (g_V^e \pm \lambda g_A^e) \eta_{\gamma Z} F_1^{\gamma Z} + ((g_V^e)^2 + (g_A^e)^2 \pm 2\lambda g_V^e g_A^e) \eta_Z F_1^Z \tag{27}$$

$$F_2^{\mathcal{J}_{ne}} = F_2^\gamma - (g_V^e \pm \lambda g_A^e) \eta_{\gamma Z} F_2^{\gamma Z} + ((g_V^e)^2 + (g_A^e)^2 \pm 2\lambda g_V^e g_A^e) \eta_Z F_2^Z \tag{28}$$

$$x F_3^{\mathcal{J}_{ne}} = -(g_A^e \pm \lambda g_V^e) \eta_{\gamma Z} x F_3^{\gamma Z} + [2g_V^e g_A^e \pm \lambda ((g_V^e)^2 + (g_A^e)^2)] \eta_Z x F_3^Z. \tag{29}$$

V primeru nabitega toka oz. sipanja s pomočjo izmenjave delca W pa se strukturne funkcije zapišejo kot

$$F_1^{\mathcal{J}na} = F_1^W \quad (30)$$

$$F_2^{\mathcal{J}na} = F_2^W \quad (31)$$

$$xF_3^{\mathcal{J}na} = xF_3^W. \quad (32)$$

Razliko sipalnega preseka glede na sučnost nukleona za nevtralen oz. nabit tok pri globoko neelastičnem sipanju na polariziranih nukleonih

$$\Delta\sigma = \sigma(\lambda_n = -1, \lambda_l) - \sigma(\lambda_n = 1, \lambda_l), \quad (33)$$

kjer sta λ_n oz. λ_l sučnosti (± 1) vhodnega nukleona oz. leptona, lahko kot v primeru nepolariziranega nukleona zapišemo s pomočjo strukturnih funkcij

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Delta\sigma^i}{dxdy} &= \frac{8\pi\alpha^2}{xyQ^2}\eta^i \left\{ -\lambda_l y \left(2 - y - 2x^2y^2\frac{M^2}{Q^2} \right) xg_1^i + \lambda_l 4x^3y^2\frac{M^2}{Q^2}g_2^i + \right. \\ &+ 2x^2y\frac{M^2}{Q^2} \left(1 - y - x^2y^2\frac{M^2}{Q^2} \right) g_3^i - \\ &\left. - \left(1 + 2x^2y\frac{M^2}{Q^2} \right) \left[\left(1 - y - x^2y^2\frac{M^2}{Q^2} \right) g_4^i + xy^2g_5^i \right] \right\}, \quad (34) \end{aligned}$$

kjer $i = \mathcal{J}_{ne}, \mathcal{J}_{na}$.

Če primerjamo izraza (24) ter (34) v limiti $\frac{M^2}{Q^2} \rightarrow 0$, vidimo, da dobimo isti izraz za razliko sipalnih presekov (34) (odvisnost od spina³) kot za sipalni presek (24) (neodvisen od spina), če naredimo substitucije

$$F_1 \rightarrow -g_5 \quad (35)$$

$$F_2 \rightarrow -g_4 \quad (36)$$

$$F_3 \rightarrow 2g_1. \quad (37)$$

Tako lahko enačbi (24) ter (34) prepisemo

$$\frac{d^2\sigma^i}{dxdy} = \frac{2\pi\alpha^2}{xyQ^2}\eta^i \left[Y_+ F_2^i \mp Y_- xF_3^i - y^2 F_L^i \right] \quad (38)$$

$$\frac{d^2\Delta\sigma^i}{dxdy} = \frac{4\pi\alpha^2}{xyQ^2}\eta^i \left[-Y_+ g_4^i \mp Y_- 2xg_1^i + y^2 g_L^i \right], \quad (39)$$

kjer $i = \mathcal{J}_{ne}, \mathcal{J}_{na}$,

$$Y_{\pm} = 1 \pm (1 - y)^2 \quad (40)$$

$$F_L^i = F_2^i - 2xF_1^i \quad (41)$$

$$g_L^i = g_4^i - 2xg_5^i. \quad (42)$$

³Izraz (33) ustreza razliki antiparalelni minus paralelni spini vhodnih delcev e^- ali ν oz. paralelni minus antiparalelni spini vhodnih delcev e^+ ali $\bar{\nu}$.

Če upoštevamo Callan-Gross-ove relacije

$$F_L^i = 0 \quad (43)$$

ter Dicus-ove relacije

$$g_L^i = 0, \quad (44)$$

vidimo, da obstajata le dve neodvisni "polarizirani" strukturni funkciji (v kvark-partonskem modelu): g_1 (ohranitev parnosti) ter g_5 (kršitev parnosti⁴) oz. dve "nepolarizirani" strukturni funkciji (v kvark-partonskem modelu): F_1 ter F_3 . Iz izrazov (43) ter (44) lahko tudi zapišemo

$$2xF_1^i = F_2^i \quad (45)$$

$$2xg_5^i = g_4^i. \quad (46)$$

4 Strukturne funkcije v kvark-partonskem modelu

Upoštevajoč kvark-partonski model se strukturne funkcije F^i ter g^i zapišejo s kvarkovskimi distribucijskimi funkcijami $q(x, Q^2)$ protona, kjer $q = u, \bar{u}, d, \bar{d}, s, \dots$, " $q(x, Q^2)dx$ " pa predstavlja število kvarkov/antikvarkov ustreznega okusa z gibalno količino med x ter $x + dx$ protonove gibalne količine v sistemu, kjer je gibalna količina protona velika.

Za reakcijo z nevtralnimi tokom $ep \rightarrow eX$ na nepolariziranem oz. na polariziranem nukleonu velja

$$[F_2^\gamma, F_2^{\gamma Z}, F_2^Z] = x \sum_q [e_q^2, 2e_q g_V^q, (g_V^q)^2 + (g_A^q)^2](q + \bar{q}) \quad (47)$$

$$[F_3^\gamma, F_3^{\gamma Z}, F_3^Z] = \sum_q [0, 2e_q g_A^q, 2g_V^q g_A^q](q - \bar{q}) \quad (48)$$

$$[g_1^\gamma, g_1^{\gamma Z}, g_1^Z] = \frac{1}{2} \sum_q [e_q^2, 2e_q g_V^q, (g_V^q)^2 + g_A^q]^2 (\Delta q + \Delta \bar{q}) \quad (49)$$

$$[g_5^\gamma, g_5^{\gamma Z}, g_5^Z] = \sum_q [0, e_q g_A^q, g_V^q g_A^q] (\Delta q - \Delta \bar{q}), \quad (50)$$

kjer je

$$g_V^q = \pm \frac{1}{2} - 2e_q \sin^2 \theta \quad (51)$$

$$g_A^q = \pm \frac{1}{2}, \quad (52)$$

kjer \pm zavisi od okusa: $+$ je pri u-tipu kvarka, $-$ pa pri d-tipu kvarka.

V enačbah(49) ter (50) je

$$\Delta q = q_\uparrow - q_\downarrow \quad (53)$$

razlika distribucij s spinom kvarka paralelnim oz. antiparalelnim spinu protona.

Za reakcijo z nabitimi tokom $e^-p \rightarrow \nu X$ in $\bar{\nu}p \rightarrow e^+X$ na nepolariziranem oz. na polariziranem nukleonu pa velja

$$F_2^{W^-} = 2x(u + \bar{d} + \bar{s} + c + \dots) \quad (54)$$

$$F_3^{W^-} = 2(u - \bar{d} - \bar{s} + c + \dots) \quad (55)$$

$$g_1^{W^-} = (\Delta u + \Delta \bar{d} + \Delta \bar{s} + \Delta c + \dots) \quad (56)$$

$$g_5^{W^-} = (-\Delta u + \Delta \bar{d} + \Delta \bar{s} - \Delta c + \dots). \quad (57)$$

⁴O kršitvi parnosti govorimo, ko v reakciji namesto elektrona sodeluje nevtrino.

V enačbah (54), (55), (56) ter (57)⁵ ostanejo le aktivni okusi.

Podobno kot v zgornjih izrazih velja tudi za reakcijo z nabitim tokom $e^+p \rightarrow \bar{\nu}X$ in $\nu p \rightarrow e^-X$ na nepolariziranem oz. na polariziranem nukleon. Narediti je potrebno le par substitucij: $u \leftrightarrow d$ ter $s \leftrightarrow c$, da ostanejo le aktivni okusi

$$F_2^{W^+} = 2x(\bar{u} + d + s + \bar{c} + \dots) \quad (58)$$

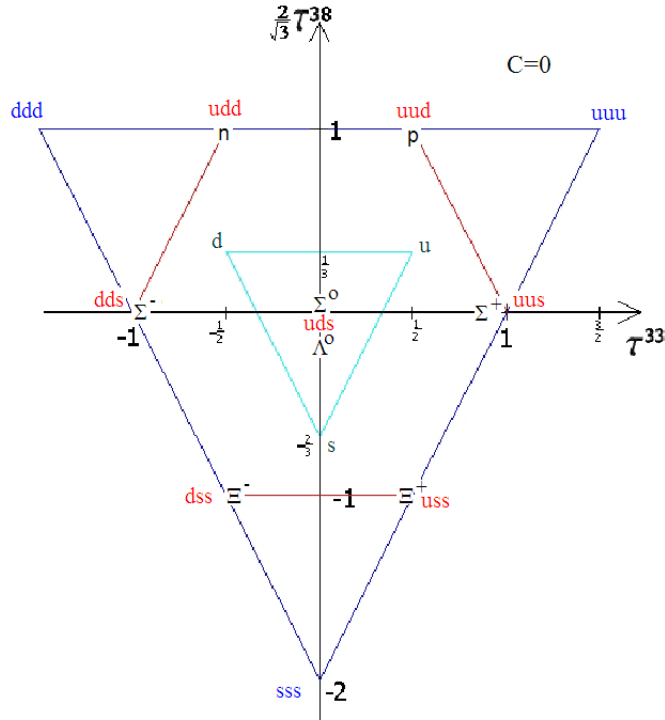
$$F_3^{W^+} = 2(-\bar{u} + d + s - \bar{c} + \dots) \quad (59)$$

$$g_1^{W^+} = (\Delta\bar{u} + \Delta d + \Delta s + \Delta\bar{c} + \dots) \quad (60)$$

$$g_5^{W^+} = (\Delta\bar{u} - \Delta d - \Delta s + \Delta\bar{c} + \dots). \quad (61)$$

5 Strukturne funkcije SU(3) barionskega okteta v kvark-partonskem modelu

Po [6] so SU(3) barioni sestavljeni le iz u , d ter s valenčnih kvarkov. Prav tako pri SU(3) klasifikaciji barionov ne govorimo o njihovi valovni funkciji, ki mora biti antisimetrična na zamenjavo delcev⁶, temveč le o valenčni kvarkovski sestavi. Torej lahko govorimo le o sipanju na nepolariziranem nukleonu, saj so SU(3) barioni obravnavani brez spinskega dela valovne funkcije.

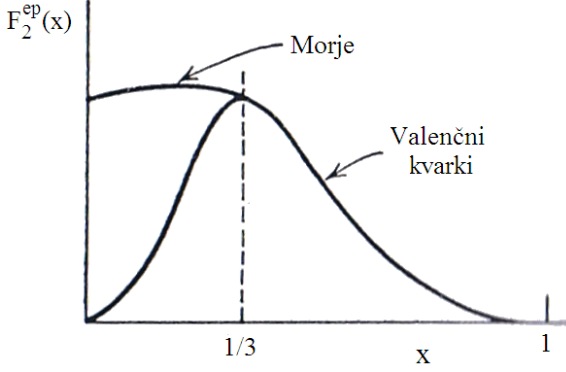


Slika 3: SU(3) barioni v ravnini $(\tau^{33}, \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38})$. Barionski oktet ima poleg zapisa kvarkovske sestave še eksperimentalno ime.

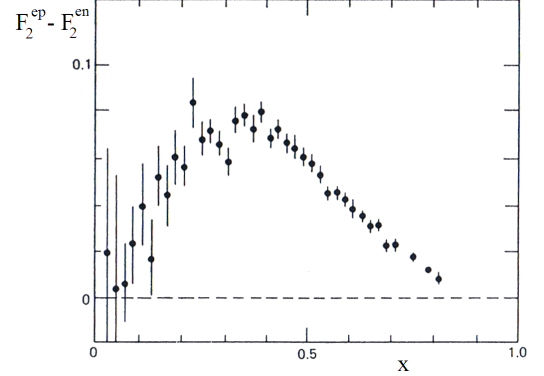
⁵V enačbah (54), (55), (56) ter (57) je bilo zanemarjeno CKM mešanje.

⁶Krajevni del hadronske valovne funkcije je simetričen, barvni del barionske valovne funkcije je antisimetričen singlet, produkt spinskega ter okusnega dela pa mora biti potemtakem simetričen, da zadostimo Pauliju oz. da je celotna valovna funkcija barionov, ki so fermioni, antisimetrična na zamenjavo delcev.

Nevtron, s katerim zamenjamo protonsko tarčo, sestavlja s protonom izospinski dublet. Z obema članoma τ^\pm dubleta pa dobimo podobne izraze za strukturne funkcije. V primeru nevtrona ter protona je potrebno le zamenjati distribucije valenčnih kvarkov: $u_V^p \rightarrow d_V^n$ ter $d_V^p \rightarrow u_V^n$. Morje parov kvark-antikvark pa je za oba bariona dubleta enako. Tako je najbolj prikladno, da se gleda razlika, ki jo tudi merijo (sipanje na nevtronski oz. protonski tarči), saj v razliki ostane le valenčni del (morje se odšteje). To teorijo (slika (4)) potrdijo rezultati eksperimenta prikazani na sliki (5).



Slika 4: Strukturna funkcija $F_2^{ep}(x)$ kot funkcija x . Upoštevano je, da je proton sestavljen iz treh vezanih valenčnih kvarkov ter morja parov kvark-antikvark.



Slika 5: Razlika $F_2^{ep} - F_2^{en}$ kot funkcija x izmerjena pri globokem neelastičnem sipanju.

Za SU(3) barionski oktet ter nevtralen tok lahko tako zapišemo razliko strukturnih funkcij za τ^\pm dublet (v primeru tripleta pa obravnavam le krajna bariona):

$$\frac{1}{x} [F_2^\gamma, F_2^{\gamma Z}, F_2^Z]^{D-L} = \frac{1}{3} (u_V - d_V)^D [1, (1 - 4 \sin^2 \theta), -(2 \sin^2 \theta)(1 - \frac{2}{3} \sin^2 \theta)] \quad (62)$$

$$[F_3^\gamma, F_3^{\gamma Z}, F_3^Z]^{D-L} = \frac{1}{3} (u_V - d_V)^D [0, 1, -(2 \sin^2 \theta)], \quad (63)$$

kjer D oz. L predstavlja desni oz. levi barion danega τ^\pm dubleta v SU(3) predstavitvi v ravnini $(\tau^{33}, \frac{2}{\sqrt{3}}\tau^{38})$. Npr. proton je desni član τ^\pm dubleta (n, p) - glej sliko (3).

Ko pa govorimo o nabitem toku, pa dobimo za razliko strukturnih funkcij za τ^\pm dublet

$$\frac{1}{x} (F_2^{W^-})^{D-L} = -\frac{1}{x} (F_2^{W^+})^{D-L} = (F_3^{W^-})^{D-L} = -(F_3^{W^+})^{D-L} = 2(u_V - d_V)^D \quad (64)$$

oz.

$$\frac{1}{x} (F_2^{W^- - W^+})^{D-L} = (F_3^{W^- - W^+})^{D-L} = 4(u_V - d_V)^D \quad (65)$$

$$\frac{1}{x} (F_2^{W^- + W^+})^{D-L} = (F_3^{W^- + W^+})^{D-L} = 0. \quad (66)$$

Za izbran oktet pa je $(u_V - d_V)^D$ enak

(L, D)	(n, p)	(Σ^-, Σ^+)	(Ξ^-, Ξ^+)
$(u_V - d_V)^D$	$(u_V - d_V)^p$	$u_V^{\Sigma^+}$	$u_V^{\Xi^+}$

6 Zaključek

S pomočjo strukturnih funkcij lahko pridemo do distribucij partonov, ki sestavljajo hadrone, oz. do verjetnostnih gostot posameznih delov gibalne količine, ki jih nosijo kvarki/gluoni. Diferencialni sipalni presek $\frac{d^2\sigma}{dx dy}$ globokega neelastičnega sipanja je namreč izražen s pomočjo strukturnih funkcij, katere kvark-partonski model poveže z omenjenimi distribucijami gibalne količine. Eksperimentalno tako predstavlja globoko neelastično sipanje nabitih leptonov ter nevtrinov zelo uporabno metodo pri raziskovanju strukture jedra ter nukleonov.

Literatura

- [1] F. Halzen, A. D. Martin. *Quarks and Leptons, An Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [2] S. Eidelman et al. *Physics Letters B592*. 2004.
- [3] C. Fry. *Proton Structure Functions and Parton Distribution Functions at the HERA ep Collider*. 2005.
- [4] W. Melnitchouk. *Structure Functions of the Nucleon*. 2003
- [5] M. Burkardt. *Imaging the Quark Structure of Nucleons*.
- [6] B. Horvat. *Hadronski multipleti*. 2006.