Scenarij porabe goriva raketnega vozila za doseg maksimalne hitrosti oz. maksimalne poti

Barbara Horvat, 28010375

11.08.2004

Kazalo

1 Nastavitev problema

1.1 Naloga

Optimalna trajektorija raketnega vozila s konstantnim trenjem. Kakšen scenarij porabe goriva nam zagotovi največjo končno hitrost? Kakšen pa največjo doseženo razdaljo?

1.2 Robni ter začetna pogoja

Masa našega raketnega vozila na začetku znaša vsoto mase praznega vozila ter goriva. Prazno vozilo predstavlja ohišje vozila in tovor, ki ga potencialno vozimo s sabo, pod gorivo pa štejemo le tisti del celotnega goriva, ki je v rezervoarju, iz katerega trenutno porabljamo le-to (rakete so lahko večstopenjske - gorivo v ostalih "še nedelujočih"rezervoarjih se šteje k tovoru). Vemo pa tudi, da vozilo na začetku miruje. Tako imamo robni pogoj, ki ga predstavlja omejitev z maso vozila ter začetna pogoja, ki povesta, da je hitrost na začetku enaka 0 (raketa miruje), prav tako pa tudi pot (rečemo, da jo začnemo šteti v točki mirovanja). Z drugimi besedami:

$$\begin{gathered}m(t=0)=M_o=m_R+m_G\\ m(t=t_k)=m_R\\ v(t=0)=0\\ s(t=0)=0\end{gathered}$$

M_o predstavlja maso vsega, m_R maso praznega vozila, m_G maso goriva, $m(t)$ maso praznega vozila skupaj z gorivom, ki je ob času t še vedno v rezervoarju, t_k čas, ko porabimo vso gorivo, v hitrost vozila, s pa pot, ki jo je le-to opravilo.

1.3 Privzetki

Kot se je izkazalo pri reševanju problema, moramo predpostaviti *maksimalni možni masni pretok goriva* (razlaga v poglavju 2.1), poznati pa moramo tudi *končni čas*, saj brez le-tega ne moremo dobiti končne hitrosti (le-ta po t_k začne padati zaradi trenja). Predpostavimo tudi, da je *masni pretok lahko le monotono naraščajoča oz. tudi konstantna funkcija časa.* Za doseg maksimalne hitrosti je to očiten pogoj, za doseg maksimalne poti pa bi se lahko poraba mase od nekega časa dalje (ko se stvar že giba) zmanjševala do minimalne porabe, ki je potrebna, da še vedno premagujemo silo trenja (končni rezultat je dal, da take funkcije odpadejo, zato jih bomo izpustili in upoštevali le prve). Rečemo pa tudi, da je koeficient lepenja kar enak koeficientu trenja, tako da na začetku ne rabimo upoštevati, da je potreben malce večji masni pretok, da lahko spravimo raketo v gibanje.

Končni čas dobimo iz predpostavke o rezervoarju, češ da ven potiska gorivo bat (model za "ustvarjanje"pritiska, s katerim zamenjamo spremembo temperature goriva (na začetku zelo nizka) in je ne rabimo upoštevati), pravzaprav izberemo, da je "pogonska tekočina" idealna (nestisljiva, njene lastnosti niso odvisne od zunanjih parametrov - kakšne temperature kot smo že rekli in še česa). Navsezadnje pa privzemimo, da je izkoristek goriva za pogon 100% .

Slika 1: Rezervoar.

Iz slike 1 se vidi, da sem izbrala $h \ll l$, da lahko rečemo, da po iztisku goriva iz rezervoarja v izpušno cev lahko rečemo, da te mase več ni v sistemu rakete. V računu sem seveda zanemarila kakršnekoli efekte, ki bi se lahko potencialno pojavili, ko je $h \sim l$ oz. ko je goriva le še malo v rezervoarju. Pomemben privzetek pa je tudi ta, da je vrat šobe (izpušne cevi) premičen, da lahko rečemo, da je hitrost goriva v_G vedno konstantna; izpušna cev pa je takšne oblike, s katero dosežemo največjo možno hitrost goriva.

$$\Phi_m = -\frac{dm}{dt} = -\frac{\rho S dl}{dt} \tag{1}$$

$$v_B = \frac{dl}{dt} \tag{2}$$

Enačbo 1 vstavimo v izraz 2:

$$v_B = -\frac{1}{\rho S}\frac{dm}{dt} = \frac{\Phi_m}{\rho S} \tag{3}$$

Φ_m... masni pretok merjen med rezervoarjem in šobo; definiran je kot nenegativna količina (zato se v enačbi 1 pojavi minus - masa se s časom manjša)
ρ... gostota goriva
S... površina meje rezervoar izpušna cev
v_B... hitrost bata; maksimalna hitrost bata je določena z maksimalnim masnim pretokom.

Povedati je še potrebno, da smo privzeli, da bat čisto na koncu vedno doseže maksimalno hitrost (le za konstanten masni pretok je hitrost bata vedno konstantna in lahko variira od minimalnega potrebnega pa do maksimalnega možnega; s tem pa sem zaobjela tudi vse tiste pretoke, pri katerih bat ne doseže maksimalne končne hitrosti - možno je torej primerjati pretoke različnih funkcij, pri katerih je hitrost bata na koncu enaka in pa pretoke konstantne funkcije v odvisnosti od končne hitrosti bata). Z vsemi temi predpostavkami pa lahko izračunamo končne čase. Dobimo jih iz enačbe 3, ko upoštevamo, da poznamo vrednost hitrosti bata ob času t_k (prej smo rekli,da je v_B maksimalna oz. če imamo konstanten masni pretok, je konstantna v_B vsaj tolikšna, da se sila pospeševanja izenači z zaviralnimi silami). Torej lahko zapišemo:

$$t_k = (-\frac{dm}{d\tau})_{\tau=1}\frac{1}{\rho S v_{Bk}} \ , \tag{4}$$

kjer je $\tau = \frac{t}{t_k}$, v_{Bk} pa je končna hitrost bata.
Minimalen masni pretok, (iz enačbe 25; $\dot{v} = 0$) pa določajo zaviralne sile:

$$\Phi_m = \frac{\beta}{v_G} = \frac{m_G}{t_k} \tag{5}$$

od koder lahko izrazimo maksimalen čas potovanja.

1.4 Gibalna enačba

Gibanju raketnega plovila lahko nasprotuje konstantna sila trenja, linearna, kvadratna sila upora ali pa še kakšna druga zaviralna sila. Lahko bi tudi upoštevali, da se vozilo giba v nekem potencialnem polju, vendar ga mi kar postavimo na nič. V našem primeru celo predstavlja zaviralno silo le konstantna sila trenja. No, pa izpeljimo gibalno enačbo.

1.4.1 Lagrangeov formalizem

Najprej izpeljimo čim bolj splošno gibalno enačbo oz. upoštevajmo vse prej naštete zaviralne sile:

$$\vec{F}_{tr} = -\beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{6}$$

$$\vec{F}_l = -\frac{\eta S_R}{d} v \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{7}$$

$$\vec{F}_k = -\frac{1}{2} c_u \rho S_r v^2 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \tag{8}$$

Kjer je:

- $\vec{F}_{tr}$ konstantna sila trenja, β koeficient trenja $[N]$, $\vec{v}$ hitrost vozila
- $\vec{F}_l$ linearna sila upora, η viskoznost $[\frac{kg}{ms}]$, S_R površina rakete, d izbrana značilna linearna razsežnost v čelnem preseku telesa
- $\vec{F}_k$ kvadratna sila upora, c_u koeficient upora $[\frac{1}{m^2}]$, S_r največji prečni presek telesa, ρ gostota kapljevine v kateri je raketa.

Pospeševalno silo pa lahko zapišemo kot

$$\vec{F}_p = \Phi_m \vec{v}_p \ , \tag{9}$$

kjer predstavlja $\vec{v}_p$ hitrost s katero dejansko pospešujemo (ne pospešujemo s hitrostjo goriva, ampak je le-ta zmanjšana zaradi trenutne hitrosti rakete - tudi gorivo, ko je še na raketi, se giba z njo) in jo lahko zapišemo kot

$$\vec{v}_p = \vec{v}_G - \vec{v}. \tag{10}$$

Iz Analitične mehanike vemo:

$$L = \frac{1}{2} m(t) \dot{\vec{q}}^{\,2}(t) - V \ , \tag{11}$$

kjer je L Lagrangeova funkcija, q_k k-ta generalizirana koordinata, $V = V(\vec{q}, t)$ potencial

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \tag{12}$$

predstavlja konzervativne sile

$$Q_k = \vec{F}_l \frac{\partial \vec{q}_l}{q_k} \tag{13}$$

nekonzervativne sile

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \tag{14}$$

Euler-Lagrangeovo enačbo.

Iz enačb 6, 7, 8 in 9 vidimo, da imamo opravka le z nepotencialnimi silami. Ker nobena izmed nastopajočih sil ni konzervativna, je potencial V enak 0. Lahko bi sicer dodali npr. gravitacijski potencial v katerem bi se raketa gibala, vendar to ni naša naloga. Kar pa je bolj pomembno, je to, da je naš problem le enodimenzionalen, saj vse sile kažejo v smeri hitrosti rakete. Tako lahko zapišemo iz enačb 11 ,13, 14 :

$$L = \frac{1}{2} m(t) \dot{x}^2(t) \tag{15}$$

$$Q_x = (\vec{F}_{tr} + \vec{F}_l + \vec{F}_k + \vec{F}_p) \frac{\partial (x \hat{e_x})}{\partial x} \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x \tag{17}$$

V izraz 17 vstavimo 16 (v le-tega pa 6 ,7 ,8 ,9) in 15 ter dobimo:

$$\frac{d}{dt}(m(t)\dot{x}(t)) = -\beta - \frac{\eta S_R}{d} v(t) - \frac{1}{2} c_u \rho S_r v^2(t) + \dot{m}(v(t) - v_G) \tag{18}$$

Sedaj rečemo, da je $\dot{x}(t) = v(t)$ in da je $\ddot{x}(t) = \dot{v}(t)$ in vstavimo v 18 ter pokrajšamo kar se da.

$$\mathbf{m(t)\dot{v}(t) + \dot{m}(t) v_G = -\beta - \frac{\eta S_R}{d} v(t) - \frac{1}{2} c_u \rho S_r v^2(t)} \tag{19}$$

To je torej iskana gibalna enačba.

1.4.2 Sile

Zgoraj izpeljano gibalno enačbo bi lahko dobili na precej lažji način, če bi opazovali sile (torej Newtonov zakon iz katerega se da tudi izpeljati enačba 14).Zapišimo:

$$\vec{R} = \vec{F_p} + \vec{F_{tr}} + \vec{F_l} + \vec{F_k} \ , \tag{20}$$

kjer je $\vec{R}$ rezultanta vseh sil in kaže v smeri hitrosti (kot vse ostale sile). Ob upoštevanju

$$R = \dot{m}v + m\dot{v} \tag{21}$$

dobimo ponovno enačbo 19.

1.4.3 Gibalna količina

Da bi preverili ali se nismo vseeno zmotili v kakšnem predznaku oz. če je bil premislek glede R dober (izraz 21), poskusimo dobiti isto gibalno enačbo na način iz prvega letnika (z gibalno količino), le da tokrat upoštevamo še zaviralne sile. Glede na to, da vsi trije načini izpeljave predstavljajo izpeljavo iz drugega Newtonovega zakona (torej je to ena in ista stvar pač na tri različne načine), ne bi smelo biti nobenih razlik v končnem izrazu. Če bi tudi z gibalno količino dobili isto gibalno enačbo, potem bi to pomenilo, da res velja izraz 21. Torej zapišimo sunek sile za našo raketo:

$$(\vec{F_{tr}} + \vec{F_l} + \vec{F_k})dt + mv = (m - \Phi_m dt)(v + dv) + dm(v_G - v) \tag{22}$$

$$-(\beta + \frac{\eta S_R}{d}v + \frac{1}{2}c_u \rho S_r v^2)dt + mv = mv + \dot{m}vdt + mdv + v_G dm - vdm \tag{23}$$

$$-\beta - \frac{\eta \mathbf{S_R}}{\mathbf{d}}\mathbf{v} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{c_u}\rho\mathbf{S_r}\mathbf{v^2} = \mathbf{m\dot{v}} + \mathbf{v_G\dot{m}} \tag{24}$$

Dobili smo tako še enkrat enačbo 19. Sedaj lahko trdim, da je izraz 21 pravilen.

2 Reševanje problema

V gibalni enačbi nastopata dve od časa odvisni funkciji: ena prispeva sebe ter svoj odvod, druga pa le odvod. Da bo bolj jasno:

$$-\beta = \mathbf{m\dot{v}} + \mathbf{v_G\dot{m}} \tag{25}$$

Ker želimo poznati rešitev te diferencialne enačbe ob vsakem času, bi morali poznati ali obnašanje hitrosti ali pa mase v odvisnosti od časa, da bi lahko izračunali še drugo funkcijo funkcijo. Ker mi tega nimamo, si izberemo različne funkcije za $m(t)$, saj za le-to imamo robni pogoj. Drugo funkcijo pa potem dobimo iz enačbe 25 :

$$v(t) = v_G ln(\frac{M_o}{m(t)}) - \beta \int_0^t \frac{dt}{m(t)} \ , \tag{26}$$

kjer prvi člen predstavlja poganjajoči del oz. rešitev naše gibalne enačbe, ko nimamo nobene zaviralne sile (takrat je končna hitrost vedno enaka ne glede na $m(t)$):

$$v_K = v_G ln(\frac{M_o}{m_R}) \ , \tag{27}$$

drugi člen pa je zaviralni, ki napravi končno hitrost odvisno od $m(t)$. Za izračun poti pa smo potrebovali le še integrirati izraz 26 po času od 0 pa do nekega poljubnega časa t.

2.1 Možni scenariji porabe goriva

Za $m(t)$ izberemo različne funkcije, ki ustrezajo robnim pogojem, a zaradi preglednosti si poglejmo le nekatere.

Vemo, da realno ni možen neskončen masni pretok oz. ni možno, da bi bila funkcija $m(t)$ oblike

$$m(t) = M_o - m_G \delta(t). \tag{28}$$

Iz 26 je očitno, da če bi veljal izraz 28, bi bila hitrost maksimalna oz. kar enaka 27 , saj je $\int_0^0 = 0$. Zato kar določimo vrednost za maksimalen masni pretok (realni podatki iz vira [1][1]). Po drugi strani pa vemo, da se raketa začne gibati šele, ko je

$$\Phi_m = \frac{\beta}{v_G}. \tag{29}$$

To pomeni, da smo maso zlivali stran toliko časa, dokler ni masni pretok dosegel vrednosti 29. Funkcije $m(t)$, ki sem jih uporabila:

$$m_1(t) = M_o - m_G \frac{t}{t_{k1}} \tag{30}$$

$$m_2(t) = M_o - m_G \frac{t}{3t_{k1}} \tag{31}$$

$$m_3(t) = M_o - \frac{1.1\beta}{v_G} t \tag{32}$$

[1]podatki so zaokroženi

$$m_4(t) = M_o - m_G(\frac{t}{t_{k4}})^2 \tag{33}$$

$$m_5(t) = M_o - m_G(\frac{t}{t_{k5}})^3 \tag{34}$$

Tu predstavljajo t_{ki} pripadajoče končne čase funkcijam $m_i(t)$, ki jih izračunamo po enačbi 4 oz. za m_3 po 5. Da pa lahko kaj izračunamo, si moramo izbrati vrednosti za vse nastopajoče konstante. Le te sem dobila iz vira [1] za *SaturnV*:

$$M_o = 3\ 10^6 kg$$
$$m_R = 2\ 10^6 kg$$
$$v_G = 10 \frac{km}{s}$$
$$\beta = 1MN$$ [2]
$$S = \pi m^2$$ [3]
$$\rho = 800 \frac{kg}{m^3}$$ [4]
$$v_{B_{max}} = 5 \frac{m}{s}$$ [5]

V izrazih 30, 31 in 32 vidimo konstantne masne pretoke: maksimalnega možnega, tri-krat manjšega od le-tega in 10% večjega od minimalnega potrebnega. Izraz 33 predstavlja linearni masni pretok, izraz 34 pa kvadratnega.[6]

2.1.1 Masa plovila kot funkcija časa

Očitno je, da enačbe 30, 31, 32, 33 ter 34 ustrezajo robnemu pogoju iz poglavja 1.2. To se vidi tudi iz grafa 2, kjer predstavlja zgornja črna črtkana črta začetno maso (to je masa vsega skupaj), spodnja črna črtkana črta pa končno (to je masa rakete oz. masa plovila brez odtečenega goriva iz posamezne stopnje rakete), saj imajo vse odvisnosti spreminjanja mase od časa na začetku vrednost celotne masa, na koncu pa le še mase rakete.

[2] ce ni rečeno drugače

[3] površina meje rezervoar-šoba

[4] gostota kerozina

[5] maksimalna hitrost bata

[6] Na vseh grafih si funcije 30, 31, 32, 33 ter 34 in prav tako njim pripadajoči ostali izrazi sledijo: odebeljena rdeča, rdeča, črtkana rdeča, zelena ter modra krivulja.

Slika 2: Spreminjanje mase celotnega plovila s časom za funkcije $m(t)$ iz poglavja 2.1.

Ker smo definirali masne pretoke tako, da imajo na koncu vsi maksimalno možno vrednost, so vrednosti odvodov funkcij $m(t)$ ob pripadajočih končnih časih enake. To pa ne velja za $m_2(t)$ in $m_3(t)$, saj bat nikoli ne doseže maksimalne hitrosti. Kar pa je seveda logično in kar lahko tudi preberemo iz grafa 2 je, da če je odvod funkcij $m(t)$ manjši (masni pretok je manjši), se lahko peljemo dlje časa.

2.1.2 Masni pretok goriva kot funkcija časa.

Zadnje ugotovitve se bolj očitno vidijo na sliki 3: $\dot{m}_1(t_k) = \dot{m}_4(t_k) = \dot{m}_5(t_k)$.

Slika 3: Masni pretoki goriva v odvisnosti od časa za različne $m(t)$ iz poglavja 2.1.

2.1.3 Pospeševanje rakete za različne porabe goriva

Iz grafa 4 je razvidno, da raketa pospešuje, če je masni pretok goriva vsaj konstanten in večji od minimalnega potrebnega, ki določa čas začetka gibanja vozila. Če pa je enak le-temu, se raketa lahko giba kvečjemu s konstantno hitrostjo in še to le toliko časa, dokler ne porabi vsega goriva. Po tej točki sledi le še zaviranje zaradi trenja.[7]

Slika 4: Pospešek raketnega vozila kot časovna funkcija za različne masne pretoke.

Ne smemo prezreti, da je tudi pospešek za tiste $m(t)$, pri katerih doseže bat maksimalno mozno hitrost ob t_k oz. je hitrost bata vedno maksimalna, ob t_k vedno enak ne glede na velikost trenja. Razlikuje se le pri funkcijah, pri katerih bat na koncu nima iste hitrosti.

2.2 Določitev scenarija porabe goriva za doseg maksimalne hitrosti

Sedaj pa narišimo zgornjim funcijam pripadajoče odvisnosti hitrosti od časa.

[7] Vse funkcije so prikazane le do končnega časa.

Slika 5: Pipadajoče hitrosti plovila v odvisnosti od časa k danim $m(t)$ iz poglavja 2.1.

Pri prej izbranem koeficientu trenja med končnimi vrednostmi hitrosti ni tako očitne razlike, zato povečajmo trenje:

Slika 6: Pipadajoče hitrosti plovila v odvisnosti od časa k danim $m(t)$ pri $\beta = 20MN$.

Sedaj pa je natančno razvidno, da dosežemo maksimalno hitrost, le v primeru, ko je vseskozi poraba goriva maksimalna možna.

2.3 Določitev scenarija porabe goriva za doseg maksimalne poti

Iz hitrosti dobljenih v poglavju 2.2 lahko določimo njim ustrezne poti:

Slika 7: Odvisnost poti od časa za $m(t)$ iz poglavja 2.1.

Razvidno je, da je pot tem daljša, čim manjši je masni pretok goriva. Da se pa raketa sploh premika, mora biti izpolnjena enačba 7, katera določa minimalni potrebni masni pretok in tako tudi pretok, s katerim pridemo najdlje (pri ostalih nekonstantnih masnih pretokih na začetku celo zlivamo gorivo stran). No, pa poglejmo kaj se dogaja s funkcijo m_3:

Slika 8: Odvisnost poti od časa za funkcijo $m_3(t)$.

Vidimo, da je res pot le-te najdaljša. *Sicer pa tudi vemo, da se počasi daleč pride.*

3 Obdelava rešitve

3.1 Primerjava odvisnih spremenljivk za scenarij dosega maksimalne hitrosti za različne koeficiente trenja β

Naš problem je vseboval trenje, zaradi česar se je rešitev za hitrost odmaknila od idealne (ko ni trenja). Torej poglejmo kaj se dogaja s sistemom, ki doseže maksimalno možno pot oz. je poraba goriva maksimalna.

Slika 9: Spreminjanje mase celotnega plovila s časom za funkcijo $m_1(t)$ pri različnih β; seveda je očitno, da noben $m_1(t)$ ni odvisen od β.

Slika 10: Maksimalen masni pretok prav tako kot $m_1(t)$ ni odvisen od trenja.

Slika 11: Spreminjanje pospeška vozila s časom za $m_1(t)$ pri različnih β. Vidimo, da z večanjem trenja, pada pospešek.

Prav tako, kot lahko zaključimo za pospešek vozila v odvisnosti od trenja[8], lahko tudi za hitrost oz. pot: čim večje je trenje, tem manjša je hitrost oz. krajša je pot. Namreč:

Slika 12: Hitrost v odvisnosti od trenja.

Slika 13: Pot v odvisnosti od trenja.

[8]Odebeljena rdeča krivulja predstavlja trenje, kjer je $\beta = 2,5MN$ (ne odstopa veliko od idealnih pogojev, namreč, ko je trenje 0 - črna), redeča z daljšimi črticami trenje z $\beta = 10MN$, redeča s krajšimi črticami trenje z $\beta = 25MN$, roza pa trenje z $\beta = 125MN$.

3.2 Primerjava odvisnih spremenljivk za scenarij dosega maksimalne poti za različne koeficiente trenja

Poglejmo sedaj kaj se dogaja s sistemom, ki doseže maksimalno možno pot (z minimalno porabo goriva), katera se je zmanjšala (ponovno) zaradi trenja.[9]

Slika 14: Spreminjanje mase celotnega plovila s časom za funkcijo $m_3(t)$ iz poglavja 2.1. pri različnih trenjih.

[9]Koeficient trenja β je pri odebeljeni modri črti $1MN$, pri tanki modri črti $2,5MN$, pri modri črti z daljšimi črticami $10MN$, pri tisti, ki pa je iz najkrajših črtic, pa znaša $25MN$.

Slika 15: Masni pretok funkcije $m_3(t)$ za različne koeficiente trenja.

Vidimo, da je minimalni pretok goriva (kot tudi $m_3(t)$) odvisen od trenja, ki predstavlja mejno vrednost potisne sile - mejo med gibanjem in mirovanjem.

Slika 16: Pospešek funkcije $m_3(t)$ za različne koeficiente trenja (potisna sila je za 10% večja od zaviralne sile).

Kot smo že ugotovili v poglavju 2.1.3 in kar vidimo tudi iz tega grafa, je to, da je končen pospešek tem večji, čim večji je masni pretok, pa tudi tem hitreje doseže končno vrednost.

Slika 17: Hitrost funkcije $m_3(t)$ pri različih trenjih (potisna sila je za 10% večja od zaviralne sile).

Očitno je, da če je večje trenje, mora biti minimalna poraba večja, zato se gorivo hitreje porabi (t_k je manjši), a je hitrost na koncu vedno enaka - od trenja je torej odvisno le to, kdaj doseže hitrost končno vrednost.

Slika 18: Pot funkcije $m_3(t)$ pri različni koeficientih trenja (potisna sila je za 10% večja od zaviralne sile).

Tudi tu je pot tem daljša, čim manjša je poraba oz. čim manjše je trenje. Ne le, da je tako pot najdaljša (za majhna trenja - poglavje 3.3), tako se tudi vozimo največ časa, kar pa ni tako v redu, saj ponavadi želimo priti na cilj v najmanjšem možnem času s seveda čim majšo porabo goriva. To pa predstavlja ravno oba problema: doseg maksimalne hitrosti in doseg maksimalne poti. Tako bi si potem morali izbrati, v kakšnem času bi želeli priti na cilj (ima točno določeno razdaljo), s čimer bi določili porabo goriva oz. hitrost s katero bi prišli na cilj.

3.3 Končna hitrost ter pot v odvisnosti od trenja za različne konstantne masne pretoke

V poglavju 2.2 in 2.3 smo določili scenarija za porabo goriva za doseg maksimalne poti oz. hitrosti. Sedaj pa nas zanima, če je naša ugotovitev kako odvisna od trenja in če to kaj spremeni rezultat.

Slika 19: Pot za različne koeficiente trenja za maksimalni možni in minimalni potrebni masni pretok.

Iz grafa 19[10] je očitno, da pot z minimalno porabo goriva ni vedno najdaljša, ampak obstaja neka odvisnost od tenja. Pa si poglejmo[11]:

[10] Rdeče krivulje ustrezajo maksimalni porabi, modre pa minimalni. Tipi krivulj označujejo že upodobljene.

[11] Rdeča črta predstavlja maksimalno porabo, roza 1% večjo od minimalne, svetlo modra za 10% , rumena za 50%, črna za 100%, zelena pa za 400% večjo od le-te.

Slika 20: Odvisnost končne hitrosti od trenja.

Vidimo, da je za doseg maksimalne hitrosti vedno potrebno maksimalno porabljati gorivo. Izjema so le primeri, ko je trenje maksimalno možno (rezultanta sil je nič) glede na porabo manjšo od maksimalne, saj tu sta maksimalna možna in minimalna potrebna poraba goriva kar eno in isto. Ponovno pa je tudi očitno, da je končna hitrost pri minimalni porabi neodvisna od trenja, medtem ko pri maksimalni porabi s trenjem pada.

Slika 21: Odvisnost končne poti od trenja.

Za doseg maksimalne končne poti pa se za scenarij porabe goriva odločamo glede na velikost konstantne zaviralne sile. Iz grafa 21 lahko razberemo, da če je trenje majhno, je minimalna potrebna poraba goriva najboljša izbira scenarija masnega pretoka za doseg najdaljše poti. Tudi tu (ne le za doseg maksimalne hitrosti) je očitno, da je vseeno ali kurimo gorivo maksimalno ali minimalno, kadar sta pretoka enaka oz. ko je trenje največje možno pri manjši porabi. Vendar je v primeru maksimalne možne poti možna še ena točka (β,s_k) pri kateri je vseeno ali porabljamo gorivo maksimalno ali minimalno. Ta je prisotna vse dokler ne presežemo minimalne porabe za vsaj 100%. Od tu dalje pa imamo le eno tako točko (to je pri maksimalnem trenju za dano manjšo porabo). Za vse porabe manjše od vsaj enkrat večje od minimalne pa uporabimo maksimalni možni pretok med vrednostima koeficienta trenja, ki označujeta presečišči dane porabe z maksimalno. Iz grafa pa še vidimo, da čim večji je manjši pretok (mora biti večji od minimalnega potrebnega), tem majšo zaviralno silo lahko premagamo, saj masni pretok manjše porabe (določili smo jo kot nek faktor minimalne potrebne porabe (ta faktor mora biti večji od 1), ki pa je odvisna os trenja) ne more biti večji od maksimalne možne.

4 Zaključek

Za konec si poglejmo, kako se je obnašalo naše vozilo pri pretoku 10% večjem od minimalnega potrebnega in pa še pri maksimalnem možnem enkrat pri trenju $\beta = 1MN$ ter drugič pri $\beta = 10MN$.

β		maksimalna končna hitrost	maksimalna končna pot
1MN	t_k	$2,5min$	$5h$
	v_k	$10,9\frac{km}{s}$	$1\frac{km}{s}$
	s_k	$700km$	$7500km$
10MN	t_k	$2,5min$	$3h$
	v_k	$1o\frac{km}{s}$	$1\frac{km}{s}$
	s_k	$650km$	$750km$

Največja končna hitrost v nobenem primeru ni presegla druge kozmične hitrosti (ubežne hitrosti: $\sqrt{2g_oR_Z} \sim 11,20\frac{km}{s}$, kjer je g_o težni pospešek na površju Zemlje, R_Z pa radij Zemlje), je pa pri scenariju za doseg maksimalne hitrosti presegla prvo ($\sqrt{g_oR_Z} \sim 7,920\frac{km}{s}$) za obe vrednosti trenja. V tem primeru smo potovali manj kot tri minute, medtem ko pri dosegu maksimalne poti čas štejemo v urah. Pri najbolj nepotratnem načinu potovnanja (največja dosežena razdalja) smo pri manjšem trenju naredili kar 7500km, kar je kar 10-krat več kot pa pri najbolj potratnem (maksimalna končna hitrost). Pri 10-krat večjem trenju pa ni več tako očitna razlika med potratnim in nepotratnim scenarijem. Po vsej verjetnosti zaviralne sile niso tako velike, kot smo dopustili v nalogi, ampak lahko kar privzamemo, da so "ravno prav majhne", da lahko rečemo, da je scenarij za doseg maksimalne razdalje kar minimalna poraba goriva (za doseg maksimalne hitrosti je pa ne glede na trenje potreben kar maksimalen pogon).

Literatura

[1] http://apollomaniacs.web.infoseek.co.jp/apollo